HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

# Opiskelijoiden käsityksiä äärettömyydestä matematiikassa

Johan Kantola

Pro gradu -tutkielma

Helsingin Yliopisto
Matemaattis-luonnontieteellinen tiedekunta
Matematiikan ja tilastotieteen osasto
Matematiikan aineenopettajan opinnot
Helmikuu 2020
Ohjaaja: Mika Koskenoja

HELSINGIN YLIOPISTO — HELSINGFORS UNIVERSITET — UNIVERSITY OF HELSINKI

| Tiedekunta/Osasto — Fakultet/Sektion — Faculty | Laitos — Institution — Department |
|---|---|
| Matemaattis-luonnontieteellinen | Matematiikan ja tilastotieteen osasto |


Tekijä — Författare — Author

Johan Kantola


Työn nimi — Arbetets titel — Title

Opiskelijoiden käsityksiä äärettömyydestä matematiikassa

Oppiaine — Läroämne — Subject

Matematiikka, aineenopettaja

| Työn laji — Arbetets art — Level | Aika — Datum — Month and year | Sivumäärä — Sidoantal — Number of pages |
|---|---|---|
| Pro gradu -tutkielma | Maaliskuu 2020 | 48 |


Tiivistelmä — Referat — Abstract

Työssä tutkitaan oppilaiden käsityksiä ja ajatusmalleja äärettömyyteen liittyen matematiikassa. Oppilaat ovat eri-ikäisiä ja tutkimuksessa keskitytään kansainvälisesti eri oppijoihin eikä keskitytä vain tiettyyn yhteen koululuokkaan. Tutkimus on suoritettu teoriakatsauksella ja perustuu toisten henkilöiden tekemiin tutkimuksiin ja niiden sisältöjen keskinäiseen vertailuun.

Työssä esitetään teoreettisesti erilaisia ajatusmalleja ja -prosesseja, jotka nähdään yhdistävänä tekijänä matemaattisessa ajattelussa ja erityisesti äärettömyyden suhteen, kuten esimerkiksi induktioon perustuvaa ajattelua sekä äärettömyyden ymmärtämistä intuitiivisesti. Lisäksi tutkimuksessa käydään läpi tuloksia, joita on saatu oppilaiden vastatessa tutkimuskyselyihin.

Työn teoriapohjana ovat laadulliset ja määrälliset tutkimukset, joilla pyritään selvittämään niin käytännössä kuin teoriassa, mihin oppilaiden käsitykset äärettömyydestä pohjautuvat. Tutkittaessa oppilaiden käsityksiä äärettömyydestä laadullisesti ollaan havaittu se, että koska äärettömyys on koettu oppilaiden toimesta hyvin abstraktina käsitteenä, niin käsitettä tulisi lähestyä induktiiviselta pohjalta. Opiskelijoilla saattaa olla oikea käsitys äärettömyydestä, mutta sitä ei välttämättä kyetä yhdistämään toisenlaiseen representaation muotoon. Tällaisessa tapauksessa oppilailla saattaa olla kyseessä yksinkertaisen ajattelun malli johdonmukaisen ajattelun mallin sijasta. Tutkimuksessa otetaan lyhyesti myös kantaa siihen, miten suomalaisessa opetussuunnitelmassa äärettömyyteen liittyvät käsitteet, kuten esimerkiksi raja-arvo ja laajennettu desimaaliluku, näkyvät.

Tutkimuksen aineisto koottiin aikaisemmin tehtyjen tutkimuksien pohjalta. Aineistossa oltiin suoritettu oppilaille kyselyitä äärettömyydestä kansainvälisesti eri vuosina. Lisäksi aineistossa otettiin huomioon tutkijoiden teoriapohjaisia pohdintoja oppilaiden ajatusmalleista.

Lopputulemana tutkimuksessa päädyttiin siihen, että äärettömyys on hyvin ristiriitainen käsite ymmärtää opiskelijoille. Vaikka oppilaat ymmärtäisivät äärettömyyden konseptuaalisesti, sitä silti saatetaan soveltaa väärin. Äärettömyyden luonnetta oppilaat eivät kykene tunnistamaan uusissa esitysmuodoissa, jolloin äärettömyys näyttäytyy hyvin abstraktisena käsitteenä, jolle oppilas pyrkii intuitiivisesti löytämään yksinkertaisia selityksiä monimutkaisen ja johdonmukaisen ajattelun sijasta. Aineiston perusteella tämä voi johtua siitä, ettei oppilailla ole tarpeeksi tietoa äärettömyyteen liittyvistä muista käsitteistä, kuten raja-arvoista ja desimaalilukujen laajennuksista.



Avainsanat — Nyckelord — Keywords

Matematiikka, äärettömyys, ajattelumallit, opiskelijat, virhekäsitykset

Säilytyspaikka — Förvaringsställe — Where deposited

Kumpulan tiedekirjasto

Muita tietoja — Övriga uppgifter — Additional information

# Sisällysluettelo

# 1 Johdanto

Graduni pyrkii selvittämään, minkälaisia väärinkäsityksiä opiskelijoilla on matemaattisesta äärettömyydestä niin peruskoulussa kuin korkeammallakin koulutustasolla. Aiheesta mielenkiintoisen tekee se, että äärettömyys voidaan nähdä monesta eri perspektiivistä, sillä kyseessä on perustaltaan hyvin abstrakti käsite. Miten ihminen kykenee käsittelemään jotain päättymätöntä? Aiheen valitseminen oli itselleni melko helppoa lopulta, sillä minua kiinnostaa hieman seikkaperäisimmät matemaattiset käsitteet, ja jos työni edistää oppilaiden virhekäsitysten korjaamista, niin näen, että työni on onnistunut. Teen työni Helsingin yliopiston matematiikan ja tilastotieteen osastolla itsenäisesti, ja työni on kohdistettu kaikille niille, joita kiinnostavat äärettömyyteen liittyvät virhekäsitykset ja niiden mahdollinen korjaaminen. Työ on rajattu käsittelemään opiskelijoiden käsityksiä äärettömyydestä ja miten pedagogisesti käsityksiä tulee käsitellä.

Tavoitteeni työssäni on tunnistaa niitä yleisiä virhekäsityksiä, joita oppilailla on, ja löytää keinot, miten jokainen matematiikan aineenopettaja kykenee näitä korjaamaan. Opettamisessa opettajan on tärkeää tuoda jotain uutta, joka kehittää oppilaiden matemaattisia kykyjä. Jos opettaja tunnistaa ja pystyy korjaamaan oppilaiden väärinkäsityksiä äärettömyyteen liittyen, niin tämä on yksi monista asioista, joka tukee oppilaan kokonaisvaltaista matemaattista ymmärrystä. Tavoitteen saavuttamiseksi tutustun aiheeseen liittyvään taustakirjallisuuteen, joka muodostaa suuren osan työstäni.

Työssä hyödynnän matemaattista osaamista, jota olen kerryttänyt opiskellessani Helsingin yliopistolla. Opettajan tulee kyetä nähdä äärettömyyden eri muotoja, esimerkiksi geometrinen sarja, raja-arvo, looginen induktio ja joukko-opin teoriaa. Täten hänen tulee hallita muun muuassa näitä asioita, jotta hän ylipäätänsä kykenee johdattamaan opiskelijat oikeille perusteille äärettömyyden ymmärtämisessä. Myös pedagogista ymmärrystä opettajan tulee hallita, jotta hän kykenee jakamaan saamaansa tietoa oppilaille ymmärrettävällä ja helposti omaksuttavalla tavalla, jottei tieto vain jäisi opettajan mieleen. Tämä työ kehittää myös minun omaa ymmärrystä tulevaa opettajan uraa nähden, kun syvennyn tarkastelemaan hyvin tarkasti matemaattista äärettömyyttä ja kuinka sitä tulee käsitellä oppitunneilla työni teorian valossa.

Työssäni aion käyttää erityyppisiä teorioita, jotka kuitenkin tukevat yhdessä työni päämäärää. Jotta voidaan ymmärtää, miten oppilaiden ajatusmallit toimivat, niin on hyvä ensiksi kertoa, minkälaisia ajatusmalleja on yleisesti määritelty, jotta opettaja tunnistaa ajattelumallin, jota oppilas käyttää matemaattisen tehtävän ratkaisemisessa. Tärkeimpinä lähteinäni ovat ne tutkimukset, joissa tutkitaan kvantitatiivisesti opiskelijoiden käsitystä äärettömyydestä erilaisissa tilanteissa, ja tutkitaan ilmiötä, mikä saa opiskelijat mahdollisesti näkemään äärettömyyden ristiriidassa matematiikan määritelmien kanssa.

# 2 Paradokseja matematiikassa ja sen ulkopuolella

Äärettömyyteen voidaan liittää paradoksaalisia asioita, kuten esimerkiksi kysymys, onko 0,999… yhtä kuin 1? Tai objekti nimeltään Gabrielin torvi, jolla on äärellinen tilavuus, mutta ääretön pinta-ala. Tässä osiossa käsitellään paradokseja niin yleisesti kuin muutoinkin eri tieteen saroilla.

## 2.1 Paradoksi yleisesti

Paradoksi on sellainen, joka ihmismielelle on intuitiivisesti ristiriitainen opitun asian kanssa. Jos jokin asia tuntuu ajatuksellisella tasolla liian abstraktilta, ihminen pyrkii yksinkertaistamaan sitä niin, että koetun asian ymmärtäminen tuntuisi järjenmukaiselta. Intuitiivinen toteamus ei kuitenkaan ole looginen jatko sille, että väite pitäisi paikkansa. Paradokseja luokitellaan erilaisiin kategorioihin.

Paradoksi ei tarkoita samaa kuin ristiriitainen väite. Ristiriitaisessa väitteessä on ainakin kaksi erilaista matemaattista lähestymiskulmaa, jotka ovat keskenään ristiriidassa, mistä seuraisi alkuperäisen väitteen kumoaminen. Ristiriitaisuus syntyy ainoastaan ihmisen intuitiivisella tasolla.

Opetuksellisesti paradoksia voidaan hyödyntää siten, että sillä saadaan opiskelijat painokkaammin pohtimaan tilannetta, jota käydään lävitse tunnilla, koska oppilas saattaa kohdata tilanteen, jossa jokin asia on ristiriidassa hänen aiemmin opitun asian kanssa ja kuinka hän on sen käsittänyt. Opettajan pitäisi hyödyntää paradoksia vain, kun se liittyy käsiteltävään aiheeseen - muuten sen tarkoitusperä jää hyödyntämättä ja pahimmassa tapauksessa se lisää epäselvyyksiä oppilaan ajatteluun varsinkin, jos opettaja ei kykene riittävän pätevästi paradoksia selittämään.

### 2.2 Matemaattinen paradoksi

Yhtäsuuruus 0,999… = 1 luokitellaan paradoksiksi, koska intuitiivisesti yhtäsuuruus ei vaikuta itsestäänselvältä ja tiettyjä matemaattisia laskureittejä pitkin päädytään toisenlaisiin lopputulemiin - virheellisesti. Esimerkiksi voisimme olettaa, että 1 - 0,9 = 0,1; 1 - 0,09 = 0,01; 1 - 0,009 = 0,001 jne. Tämä edellä lueteltu yhtäsuuruuksien yhtäpitävyys on täysin totta perinteisen laskuopin mukaan. Huomioimatta matemaattisia sääntöjä on mahdollista ajatella, että luettelosta seuraa suora yhteys: 1 - 0,99999… = 0,00000…...1 eli löytäisimme jonkin luvun 1 ja luvun 0,999… väliltä.

Eräs toinen tunnettu esimerkki on niin kutsuttu ‘valehtelijan paradoksi’. Siinä henkilö, joka tituleeraa itsensä valehtelijaksi sanoo, että “olen valehtelija”. Jos hän tosiaan on valehtelija, niin tällöin hän puhuisikin totta. Eli jos hän puhuukin totta, niin voiko hän olla enää valehtelija ja näin ollen pitääkö alkuoletus hänestä enää paikkansa, että hän on valehtelija? Matemaattisen paradoksin voisi tiivistää siten, että se “rikkoo hieman matemaattisen ajattelun rakennetta, näyttää kuin sääntöjä rikottaisiin, mutta siitä huolimatta pitää validisti paikkansa.”

Opetuksessa tällaista ajatusmaailmaa on hyvä avata oppilaille, sillä monella voi olla vielä peruskoulussa vaikeuksia hahmottaa matemaattisia kokonaisuuksia, joihin liittyy ristiriitaisia tunteita. Joskus on aihettakin kokea ristiriitaisia tunteita, jos asia on ristiriitainen. Tällöin on hyvä erottaa ristiriidan ja paradoksin välinen ero, mikä saattaisi vapauttaa oppilaan matemaattista ajattelua ja hän pääsisi ymmärryksessään eteenpäin, jos hänellä on aikaisemmin ollut ongelmallista matemaattista ajattelua, joka on tuottanut hänelle ristiriitaisia ajatuksia, vaikka muuten ongelmallista matemaattista ajattelua aiheuttava käsite opettajan johdolla on todettu todeksi.

Guillermina Waldegg (2005) kertoo, että matemaattinen äärettömyys on ollut avainasemassa kehitettäessä käsitteellistä matematiikkaa. Schechter (2009) kysyy: “Jollei äärettömyyttä kyetä näkemään fyysisesti, niin missä tällöin sitä nähdään? Meidän mielissämme, tietenkin. Itseasiassa *kaikki* matematiikka sijaitsee päässämme.” Schechter jatkaa, että “saatamme nähdä kolme lentokonetta tai kolme omenaa fyysisessä maailmassa, mutta abstraktista käsitettä ‘3’ ei ilmene fyysisessä maailmassa, vaan ihmisten mielissä. Luvun ‘3’ käsite on tarpeeksi yksinkertainen, ja on tarpeeksi selkeä asia konkretisoimaan kohteita, joten sen olemassaoloa on hankala alkaa kiistämäänkään. --- Mutta äärettömyyden käsitettä on hankalampi selittää: on vaikeampaa olla varma siitä, että välitämme äärettömyyden käsitettä eteenpäin onnistuneesti toisen ihmisen mielestä toisen ihmisen mieleen.”

### 2.3 Paradokseja muualla

Kirjallisuudessa käytetään paradokseja, joilla halutaan saada lukija kiinnittämään huomiota johonkin tietynlaiseen konfliktiin. George Orwellin teoksessa *1984* valtaa pitävän puolueen motto on: “sota on rauhaa, vapaus on orjuutta ja tietämättömyys on vahvuutta.” Teoksessa tavallisen kansalaisen näkökulmasta tämä motto on hyväksytty totuutena, sillä puolueen valta on niin liiallisen suuri, että sen sanomiset otetaan yleisenä totuutena propagandan leviämisen tarkoituksena, millä halutaan pitää kansalaiset aisoissa. Paradoksi tämä on siksi, koska yleisesti voidaan ajatella sodan aiheuttavan kaaosta eikä rauhaa, vapauden olevan muuta kuin orjuutta ja asioiden tiedostamisen olevan vahvuutta.

Talouselämässä paradokseja kohdataan siten, että tulevat taloudelliset vaihtelut toimivat päinvastoin suhteessa jo olemassa olevien teorioiden kanssa, kuinka vaihtelujen *pitäisi* toimia. Taloudessa syntyy usein tämänkaltaisia paradokseja, joiden seurauksena tapahtuu odottamattomia suhdannevaihteluita, koska tietyissä tapauksissa nojataan vain teorioihin ja odotusarvoihin eikä selkeään odotukseen, miten tietyissä tilanteissa tulee tapahtumaan.

Fysiikassa paradokseja kohdataan tilanteissa, jotka ovat kaukana ihmiselämän arkipäiväisyydestä. Tällöin voidaan puhua erityisestä suhteellisuusteoriasta, jolla korvataan klassisen mekaniikan käsitys muuttumattomasta avaruudesta ja ajasta, yhteiseksi aika-avaruudeksi. Näihin liittyy paradoksi nimeltään *kaksosparadoksi,* kun kaksosista toinen ammutaan miltein valonnopeudella avaruuteen, jolloin erityisen suhteellisuusteorian mukaan avaruuteen ammuttu on ‘nuorempi’ kuin hänen maahan jäänyt kaksoisveli.

# 3 Taustateoriaa

Tässä luvussa tutustutaan erilaisiin tutkimuksiin niin oppilaiden käsityksistä äärettömyyksistä kuin erilaisista ajattelumalleista, joilla oppilas saattaa käsittää äärettömyyden luonteen.

## 3.1 Oppilaiden käsityksiä äärettömyydestä

Tutkimuksessa (D. O. Tall & R. L. E. Schwarzenberger, 1978) puhutaan oppilaiden tavasta ajatella asioita alitajuntaisesti ja tietoisesti. Oppilas saattaa ajatella, mitä tarkoittaa "olla tarpeeksi lähellä lukua 1 - miten ylipäätänsä määritellään termi 'lähellä' matemaattisesti?". Raja-arvo saattaa pitää sellaista vihjailua sisällään, että lähestyttäessä jotain lukua tarpeeksi 'lähelle', niin milloin lähestyttävä luku voidaan saavuttaa? Termiä 'lähellä' (engl. close) käytetään, jos kaksi lukua ovat lähellä toisiaan, mutta luvut eivät kuitenkaan ole yhtä suuret - yleisesti puhekielessä sanotaan kahden luvun olevan yhtä suuret, jos ne olisivat aidosti samat. Tällainen 'termien sekoitus' saattaa olla oppilaallekin hankala ymmärtää - jos yhtäsuuruutta 0,999… = 1 pohdittaessa puhutaan raja-arvosta, saattaa se antaa alitajuntaisen vihjailun, että 0,999… päätyy jonnekin 'lähimaastoon' yrittäessään 'saavuttaa' lukua 1, muttei koskaan saavuttaisi sitä. (D. O. Tall &R. L. E. Schwarzenberger, 1978)

Tutkijat jatkavat, että oppilaat ovat tottuneet peruskouluikään mennessä rajoitettuihin tarkkuuksiin esimerkiksi laskimia käyttäessään. Kun oppilas lisää laskimeen luvun $\sqrt{2}$, saa hän äärellisen luvun 1.4142136. Tätä lukua laskimella jaettaessa luvulla 10 ja kerrottaessa taas luvulla 10, saadaan laskimeen vastaukseksi 1.4142130, joka on eri kuin luvun $\sqrt{2}$ antama desimaaliluku. Tällainen tottunut ajattelu siihen, että "kuitenkin desimaaliluku päättyy johonkin" saattaa vaikuttaa siihen pohdintaan, että "kyllä luku 0,999… aina vain jatkuu, kunnes viimeiseksi luvuksi tulee ...9". (D. O. Tall & R. L. E. Schwarzenberger, 1978)

Singer ja Voica (2003) tekivät kyselyn äärettömyyteen liittyen, johon osallistui oppilaita yläastetasolta aina lukiotasolle saakka sekä myös tulevia matematiikan opettajia. Tutkijat halusivat selvittää oppilaiden ensi- ja toissijaisia intuitioita yhdistettyinä äärettömyyden käsitykseen. Vapaamuotoinen kysymys oli: “Kuvaile äärettömyyden ideaa omin sanoin”.

Bissan 8. luokalta vastasi korostaen väliaikaista ulottuvuutta: “Äärettömyys on jotain, mikä ei koskaan pysähdy. Se jatkuu ja jatkuu äärettömiin.” Rebecca 8. luokalta vastasi korostaen avaruudellista ja jaksollista ulottuvuutta: “Äärettömyys esiintyy, kun jokin ei koskaan lopu ja se jatkaa eteenpäin eikä koskaan pääty.” Octavian 4. luokalta vastasi korostaen hengellisyyttä: “Äärettömyys on salaisuus, johon emme voi päästä käsiksi. Mielemme on sidottu ja emme voi sanoa monia asioita. Vain Jumala tietää.” Xena 8. luokalta korostaa vastauksessaan ulottuvuuden jatkuvaa kulkua: “Äärettömyys on termi, jota käytämme jostain, joka ei koskaan lopu, vaan jatkaa kasvuaan.”

Seuraavat vastaukset nähdään muutoksen suhteen, Bissan 8. luokalta: “Pulpettien lukumäärä luokassa on äärellinen, koska pulpettien lukumäärä ei voi muuttua samalla tavalla kuin ääretön luku”, ja Anca 8. luokalta: “Jakajien joukko luvusta‘32561784937289463785’ ei ole ääretön, koska se on vain luku luvuista, joka ei koskaan muutu”, tai asia voidaan nähdä numeroinnin suhteen, kuten Xim 8. luokalta vastasi: “Äärellisyys on kuin kynien lukumäärä luokassa, mutta äärettömyys on kuin numeroisi kaikki luvut maailmasta”. Lie 8. luokalta korosti vastauksessaan vastuullisuutta: “Äärettömyys on kuin kaikki äänet maailmassa, jonka lukumäärää emme voi laskea”, tai Kira 8. luokalta korostaen edelleen vastuullisuutta: “Äärettömyys on kuin koskaan päättymätön luku. Siinä ei ole lukua, jonka voisit kirjoittaa ylös, koska se ei ikinä lopu”.

Oppilaiden moninaisia väärinkäsityksiä voidaan liittää joukkojen rajoihin, sillä jotkut oppilaat uskovat, että äärellinen on jotain, jolla on rajat (esimerkiksi jana luvusta 1 lukuun 2). Tähän liittyen yleinen väärinkäsitys on myös se, että äärettömyys on jotain, jolla ei ole rajoja (esimerkiksi kaikkien luonnollisten lukujen joukko). Kysyttäessä eräiltä oppilailta, kuinka monta pistettä he pystyvät luettelemaan rajalliselta janalta, he menivät mietteliäiksi. Tästä syntyi tietynlainen kognitiivinen dissonanssi, kun oppilaat olivat mieltäneet janan täysin rajalliseksi olioksi, mutta he kuitenkin päättelivät sen sisältävän äärettömän monta pientä pistettä, joiden lukumäärä kasvoi rajatta rajallisella janalla. (Singer & Voica, 2003)

Vertailtaessa kahta eri joukkoa oppilaat käyttivät intuitiivisesti moninaisia perusteluja johtopäätöksilleen, jotka useimmiten olivat vääriä. Esimerkiksi vertailtaessa kaikkia positiivisia lukuja ja parillisia positiivisia lukuja pääteltiin, että positiivisten lukujen joukko on suurempi, koska siihen kuuluu joka toinen positiivinen luku toisin kuin parillisten lukujen joukossa; vertailtaessa positiivisia parillisia ja parittomia lukuja eräs tulkinta oli se, että joukot ovat yhtä suuret, sillä kummassakin joukossa siirrytään aina joka toiselle luvulle; eräs tulkinta parillisten lukujen joukosta ja parittomien lukujen joukosta oli se, että parillisessa joukossa on enemmän alkioita, sillä se sisältää luvun 0, joka on yksi enemmän kuin parittomien lukujen joukossa, koska parittomat luvut alkavat luvusta 1. (Singer & Voica, 2003)

Singer ja Voica päätyivät tutkimuksessaan johtopäätökseen, jossa todettiin äärettömyyden olevan olennainen käsite numerosarjojen muodostamisessa, ja matemaattisten näkökohtien törmääminen äärettömyyden käsitykseen pitäisi olla mukana jo hyvin varhaisessa vaiheessa kouluopetusta, kun opettaja opettaa oppilaille matemaattisista käsitteistä yleisemmin. Tutkijat korostavat, ettei äärettömyyden käsitettä tule tuoda opetussuunnitelman kautta, vaan äärettömyyteen liittyvät lähestymistavat pitää olla yhteydessä äärettömyyteen moninaisten matemaattisten esimerkkien ja sopivien kontekstien kautta esiteltävissä, mielellään jopa matematiikan ulkopuolelta tulevien esimerkkien kautta. Äärettömyyden käsitettä tuotaessa esiin on oltava varovainen, sillä äärettömyys voidaan määrittää ja perustella vain numeerisesti, ja toisaalta paradoksiset ansat ovat läsnä, kun olemme tekemisissä äärettömien joukkojen kanssa. Ottaen huomioon muita tutkimuksia koskien ajattelumalleihin liittyviä mekanismeja, niin on olemassa keskinäisiä suhteita joidenkin luonnollisten intuitiivisten taipumusten ja oppimisprosessin välillä, mikä luo uudelleen henkilökohtaisia yhteyksiä ja rakennelmia ajatusmalleihin. (Singer & Voica, 2003)

Singer ja Voica tekivät kolme havaintoa. Ensimmäisenä havaintona oli, että jotkut oppilaat sopivissa harjoitusolosuhteissa ovat kykeneväisiä sisäistämään äärettömien joukkojen sisältämän matemaattisen intuitiivisen ajattelun. Tämä tapahtuu niin pian kuin oppilaat oppivat ymmärtämään desimaali- ja luonnollisten lukujen joukkoja niinkin pian kuin noin kymmenen vuoden ikäisinä. Toiseksi, kun oppilaiden perustelut ovat johdonmukaisia, niin ne näyttävät muodostuvan algebrallisen ja geometrisen ajattelutapojen välille. Kolmanneksi tutkijat havaitsivat, että ei ole olemassa oppilaan ikään liittyvää yhteyttä äärettömyyden intuition ymmärtämiseen; samantyyliset virheet ja väärinkäsitykset jakautuvat tasaisesti eri ikäluokkiin, kuten myös oikeanlaisten johtopäätösten teko liittyen formaaliseen tietoon. (Singer & Voica, 2003)

Safia Hamza ja Ann O'Shea (2001) tutkivat oppilaiden väärinkäsityksiä äärettömyydestä. Tutkimus käsittelee äärettömien joukkojen mahtavuuksia, johon liittyvään kyselyyn pyydettiin vastaamaan kolmea eri ryhmää samasta yliopistosta. On useita syitä, miksi oppilailla on vaikeuksia ymmärtää matemaattisia käsitteitä, mitä tämäkin tutkimus pyrkii käsittelemään. Yhtenä vaikeutena tutkijat näkevät, että oppilaat ovat tottuneet käyttämään tiettyjä termejä arkielämissään tai, jos samalla termillä on käänteinen merkitys sen matemaattisen merkitystä kohtaan eli oppilas näkee saman termin täysin erilaisessa tilanteessa.

Kyselyssä kysyttiin oppilaita selittämään äärettömyyden käsitystä. Kyselyssä kuultiin muun muuassa seuraavankaltaisia vastauksia:

> "Luvun esitysmuotoa ei voida koskaan saavuttaa, koska seuraavaksi tulee aina isompi luku."

> "Äärettömyys on isoin mahdollinen luku, mutta samalla kuitenkaan sitä ei ole olemassa. Tämä tarkoittaa sitä, ettei ole olemassa sellaista isointa lukua."

> "Se on äärettömyys eikä luku itsessään, mutta suurin mahdollinen luku, jota kohti luonnolliset luvut lähestyvät."

> "Kutsuisin sitä niiden lukujen ominaisuudeksi, joilla ei ole loppua tai suurinta arvoa. Kutsumme äärettömyyttä teoreettisesti suurimmaksi luvuksi."

> "Sanoisin sen olevan käsite. Äärettömyys ei voi oikeasti esiintyä konkreettisin termein. Se on käsitys. Jos jatketaan laskemista ikuisesti, "viimeinen luku" tulisi olla äärettömyys. Tai realistisemmin, sanottaisiin viimeisen numeron olevan itseasiassa äärettömyys, sillä sitä ei tultaisiin koskaan saavuttamaan."

Tutkimuksessa Hamzan ja O'Shean tavoitteina oli tutkia oppilaiden käsityksiä äärettömyyden käsitteestä ja heidän tavoistaan vertailla äärellisten sarjojen, numeroituvien sarjojen ja ei-numeroituvien äärettömien sarjojen välisistä eroavaisuuksista keskenään. He saivat selville, että oppilailla on paljon erilaisia käsityksiä äärettömistä joukoista. Tutkijat havaitsivat, että jokapäiväinen kieli, johon oppilaat törmäävät koulun ulkopuolella, on eräs syy oppilaiden väärinkäsityksille. Monet kyselyyn osallistuneista oppilaista olettivat numeroituvan joukon olevan joukko, jonka kaikki alkiot voitaisiin fyysisesti laskea, kuten olemme oikeassa maailmassa tottuneet laskemaan, ja tämän argumentin perusteella numeroituva joukko olisi äärellinen joukko. Samoin oppilaille ääretön joukko tarkoittaisi ei-numeroituvaa joukkoa. Tutkimuksessa havaittiin, että monet oppilaat, jotka olettivat tiettyjen ominaisuuksien pätevän numeroituville joukoille olettivat niiden pätevän myös ei-numeroituville joukoille. Oppilaat ajattelivat, että mikä tahansa osajoukko ei-numeroituvasta joukosta on myös ei-numeroituva, ja että ei-numeroituvat joukot ovat samanarvoisia. Tutkimus osoittaa, että vaikka oppilaat ymmärtävät bijektion kriteerin olevan pääasiallisin tapa arvioida äärettömien joukkojen suuruuksia toisiinsa, oppilaat silti ajattelivat kaikkien äärettömien joukkojen olevan samanarvoisia eivätkä he kyenneet soveltamaan bijektion kriteeriä oikein. Lisäksi tutkijat huomasivat, että jotkut oppilaat eivät kyenneet ilmaisemaan arkielämän joukkoja matemaattisesti oikealla tavalla. Oppilaiden ymmärtäessä äärettömyyttä lukuna, jota ei voida koskaan saavuttaa saattaa olla syy siihen, että oppilaat taipuvat ajattelemaan kaikkien äärettömyyksien olevan samoja ja kaikki joukot, joilla on äärettömät kardinaliteetit, olisivat samanarvoisia. (Hamza & O’Shea, 2001)

Hamza ja O’Shea eivät olleet löytäneet samasta aiheesta olevia tutkimuksia, jotka huomioivat oppilaiden ongelmia koskien spontaanisen käsityksen suhdetta sanaan ‘numeroituva’. Yhteenvetona tutkijat kertovat, että matematiikan opettajien tulee olla tietoisia väärinkäsityksistä liittyen mihin tahansa tiettyyn käsitteeseen, jota he opettavat, ja olisi hyödyllistä, jos matematiikan opettajat tietäisivät suurimman osan ongelmista ennalta, joita oppilaat saattavat kohdata.

## 3.2 Ajattelumallit ja -prosessit

Jotta ymmärrettäisiin, miten oppilaat käsittelevät käsitettä äärettömyys, on hyvä ymmärtää erilaisia vaihtoehtoisia näkökulmia, joista oppilaat lähestyvät aihetta. Äärettömyyteen voidaan lähestyä niin monella eri tavalla kuin on oppilaita, mutta tietynlaisia isoja, yleistäviä malleja havaitaan oppilaiden ajattelutavoissa, joihin voidaan enemmän perehtyä.

### 3.2.1 Mentaalinen ja hiljainen malli

Tutkijat (Ed Dubinskyn, Kirk Wellerin, Michael A. McDonaldin & Anne Brown, 2005) lähtevät artikkelissa liikkeelle siitä, millä tavoin ihmiset pyrkivät ajatuksellisesti ymmärtämään matematiikkaa.

Eräs tapa on *mentaalinen prosessi*. Tällaisessa prosessissa henkilö purkaa matemaattista kaavaa ainoastaan mielessään, esimerkiksi funktiota, jolloin hän miettii mentaalisti, mitä tapahtuu, kun funktioon syötetään arvoja ja mitä tuloksia funktiosta saadaan siihen syötettyjen arvojen johdosta. Tällä tavoin henkilö ei 'suorita' täsmällisesti matemaattista laskuprosessia formaalisti askel-askeleelta -periaatteella, jossa hän kävisi kirjaimellisesti jokaisen vaiheen kirjallisena lävitse. Mentaaliselle rakenteelle pohjautuva ajattelu perustuu yksilön toistokertoihin ja reflektioihin hänen pohtiessaan matemaattisia ongelmia, jolloin yksilö pyrkii ratkaisemaan ongelmaa automaattisesti oman henkilökohtaisen tiedon pohjalle tai alitajuntaisesti. (Dubinsky & co., 2005)

Matemaattista ongelmaa voidaan lähestyä myös kokonaisvaltaisella ymmärryksellä, missä henkilö kykenee formaalisti yhdistämään sen formaalisti muiden siihen liittyvien matemaattisten käsitteiden kanssa. Tällöin käydään läpi matemaattisten käsitteiden yhteyksiä toisiinsa ongelmaan liittyen ja luodaan niiden pohjalta johtopäätös, joka on oikea siinä mielessä, että se noudattaa matematiikan sääntöjä - esimerkiksi funktion muunnoksessa muodostettaessa funktiojoukkoja, funktioon liittyviä aritmeettisiä operaatioita sekä funktion ymmärtäminen topologiselta näkökannalta. Tässä tapauksessa henkilö on päässyt *kognitiiviseen päämäärään.* (Dubinsky & co., 2005)

*Mentaalisen prosessin* ja *kognitiivisen päämäärän* -ajattelutavoilla yksilö kykenee päättämään riippuen matemaattisesta tilanteesta, kummalla valitsemallaan tavallaan hän lähtee ratkaisemaan ongelmaa. Valitsemalla jomman kumman edellä esitetyistä tavoista opiskelija luo *mallin*, joka on yhtenäinen viitekehys matemaattisen ongelman ympärillä, johon ajattelun rakenne sovittuu. (Dubinsky & co., 2005)

Tutkijat palaavat aina muutaman tuhannen vuoden päähän, jolloin Aristoteles esitteli filosofisia näkemyksiään äärettömyyden kahtiajaolle - *todelliselle äärettömyydelle* ja *potentiaaliselle äärettömyydelle.* Tällaisella kahtiajaolla Aristoteles halusi ratkaista äärettömyyteen liittyvien paradoksien ongelmia esittämällä, ettei todellista todellista äärettömyyttä olisi olemassakaan, mikä jättäisi jäljelle vain käsitteen potentiaalisen äärettömyyden, joilla voitaisiin käsitellä äärettömyyteen liittyviä paradokseja.

Aristoteles halusi aikanaan arvioida, onko mikään avaruudessa ja ajassa ääretöntä. Hänen arvionsa johti siihen, että Aristoteles määritteli äärettömyyden siten, ettei sen läpi, alusta loppuun, kyetä mennä. Kuvainnollisesti hän oli sitä mieltä, että jokainen uusi askel, esimerkiksi ympyrän kehää pitkin, oli erillinen tapahtuma sitä aikaisempaan ja seuraavaan askeleen nähden. Täten tämän määritelmän mukaan ympyrän kehää ei voitu pitää äärettömänä, koska jokainen askel oli aina sarjan ensimmäinen, jolloin äärettömän monesta askeleesta syntyi kokonaisuus, jossa jokainen askel on aina ensimmäinen sarjassa. Tähän liittyen Aristoteles ei pitänyt luonnollisten lukujen joukkoa äärettömänä, mutta joka kuitenkin piti sisällään potentiaalisen äärettömyyden, sillä hänen mukaansa ihmisellä ei riittäisi aika luettelemaan kaikkien joukkojen alkioita. Aristoteles kuvasi todellisen äärettömyyden olevan "ääretön nykyhetki" tietyllä hetkellä ajan suhteen.

Aristoteleen teoreeman pohjalta filosofi Immanuel Kant (1724-1804) uskoi ihmisten olevan äärellisiä olentoja äärellisessä maailmassa. Hänellä oli vielä vuosisatojen jälkeen samanlainen ajatusmalli äärettömyydestä kuin Aristoteleellä, joka "piti jotain äärettömänä, jos määrä määrältä kykenemme aina ottamaan joukosta jotain sen ulkopuolelle."

Artikkelin kirjoittajat korostavat, että oppilaiden tulee sisäistää äärettömyyden luonne - olisivatko oppilaat taipuvaisia sanomaan, että ⅓ on prosessi, joka ei koskaan prosessina pääse päätepisteeseensä, sillä se on vain desimaalilukujen laajennus?

### 3.2.2 Loogiseen induktioon perustuva ajattelutapa

Eric Fischbein (2001) pohtii loogiseen induktioon perustuvaa ajattelua suhteessa intuitiiviseen ajatteluun. Esimerkkinä hän ottaa mielivaltaisen lukusuoran pisteen, jota ihmiset alitajuntaisesti ajattelevat pitävän sisällään jonkin hyvin pienen pinta-alallisen alueen lukusuoralta. Psykologisesti tällaista mielikuvaa on hyvin hankalaa olla ajattelematta - vertailtaessa kahta joukkoa samankokoisilla alueilla, nämä joukot eivät tosi asiassa ole yhtä suuret. Tästä syystä Fischbein ehdottaa, että luopuisimme tällaisesta ajatusmallista ja siirtyisimme katsomaan asiaa Cantorin proseduurien näkökulmasta. Abstrakti-formaalisen näkemyksen mukaan todellisuudessa nämä joukot ovat yhtä suuret, ja intuitiivisen hahmotelman mallin sisältämät pienet lukusuoran pisteet jatkavat ajatusprosessiin vaikuttamista. Tästä kaikesta opiskelijalle tulee ristiriitainen tunne, joka luo paradoksin opiskelijan ajattelumalliin, josta he eivät voi päästää irti kovin helpolla.

Fischbein jatkaa, että konseptien kuvaukselliset mallit, joihin ääretön kuuluu, pitävät sisällään alitajuntaisen ajattelun matemaattisessa prosessissa. Toinen aspekti kuuluen intuitiiviseen tulkintaan äärettömyydestä osoittaa sen, mitä joku saattaa kutsua äärettömyyden rajoittamattomaksi kapasiteetiksi. Fishbeinin selitys on, että äärettömyys näyttää olevan intuitiivisesti yhtä suuri rajoittamattoman lukusuoran kanssa siinä tapauksessa, jos desimaalilukujen prosessia jatketaan laskennallisesti ikuisesti. Tällöin kaikki pisteet voidaan saavuttaa. Logiikka rajoittamattoman äärettömän hahmotelmasta antaa ymmärtää, että raja-arvon kohdalla janaan sisältyvät peräkkäiset desimaaliluvut peittävät alleen kaikki osan pisteet ja tämä on jo varsinainen äärettömyys. Tästä seuraa tärkeä näkökulma todellisen äärettömyyden ongelmaan. Fischbein tunnistaa kaksi perustavanlaatuista ei ääneen sanottua mallia, joilla on vaikutus äärettömyyden konseptin käsittelyyn, kun toinen saattaa käsitellä asiaa pisteiden joukkona ja toinen geometrisinä figuureina. Ensiksi, kuvallisten mallien yritys tulkita pisteitä ja kynän piirtämiä jälkiä äärettömyyden tapauksessa saattaa väärentää päättelyketjun johtopäätöksiä - esimerkkeinä Fischbein ottaa pisteiden numerot kahdella eripituisella segmentillä, jotka ovat erilaisia; tai pisteiden numeroilla on eri määrä ulottuvuuksia kahdessa kuviossa, jotka ovat erilaisia. Toisaalta jos intuitiivisesti ajateltuna äärettömyys on ekvivalentti rajattomuuden kanssa, niin tällöin kaikki äärettömät joukot ovat ekvivalentteja. Luonnollisten lukujen joukko ja lukusuoran pisteiden muodostama joukko ovat ekvivalentteja, jolloin myös kahden eri pituisen segmentin pisteiden muodostamat joukot ovat ekvivalentteja. Tämä saa aikaan sen, että todellisen äärettömyyden konsepti on intuitiivisesti ristiriitainen. Kaksi erilaisesta lähtökohdasta tulevaa intuitiota taipuvat olemaan syvässä ristiriidassa keskenään. (Fischbein, 2001)

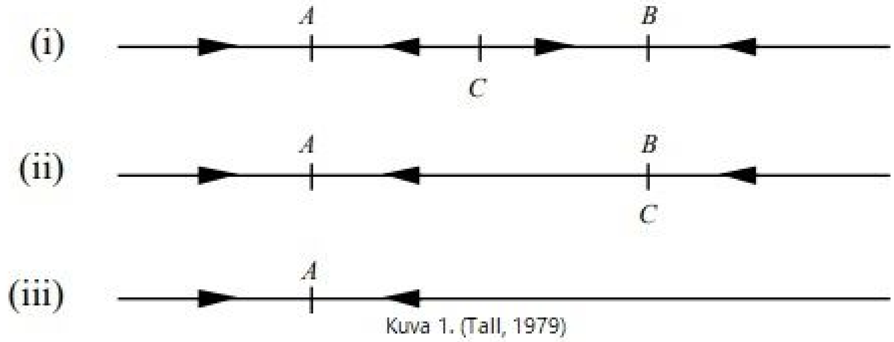
Käsiteltäessä erittäin abstraktisia ja kompleksisia konsepteja meidän päättelykykymme taipuvat vaihtumaan vaihtoehtoisiin ajattelutapoihin, jotka ovat helpommin lähestyttäviä ja enemmän helposti manipuloitavia. Tätä kutsutaan *mentaaliseksi malliksi.* Joskus mentaalista mallia käytetään tarkoituksellisesti ja tietoisesti, mutta joskus sen läsnäolosta ei olla tietoisia ja sen vaikutuksesta, jolloin käytämme mentaalista mallia huomaamattamme. Tätä kutsutaan hiljaiseksi malliksi (*engl. tacit model).* Sillä on merkittävä rooli strategiseen ajatteluun ja johtopäätöksien laatimiseen. Hiljaiset mallit, jotka ovat tietoisesti hallitsemattomia, saattavat johtaa vääristyneisiin tulkintoihin ja johtopäätöksiin. Fischbein tutki, että kuvallisten mallien hiljainen vaikutus abstraktisten ja geometristen konseptien loogisuuteen johtaa vääriin tai ristiriitaisiin johtopäätöksiin, kun ollaan äärettömyyden kanssa tekemisissä. Fischbein ehdottaa, että opetettaessa geometriaa, lukuteoriaa ja joukko-oppia, oppilaat kykenisivät ymmärtämään hiljaisten mallien, jotka ovat useimmiten kuvallisia, vaikutusta heidän päättelyprosesseihinsa. Näin ollen oppilaita tulee auttaa kehittämään heidän kykyä hallita matemaattista päättelyä ja välttämään mahdollisia sudenkuoppia. (Fischbein, 2001)

## 3.2.3 Katastrofiteorian mallinnus

D. O. Tall ja R. L. E. Schwarzenberger (1978) ovat tutkimuksissaan sitä mieltä, että merkittävin hidaste paradoksien ymmärtämiselle on se, että oppiessaan matematiikkaa oppilaat saattavat käsittää kielellisesti tai määritelmällisesti tietyt käsitteet väärin, jolloin niiden suhde toisiinsa nähdään hyvin kaukaisina - esimerkkeinä päättymättömät desimaaliluvut ja raja-arvot. Ristiriidan hoitamiseksi vaaditaan kärsivällinen opettaja, joka kykenee näkemään asioiden taakse kokonaisuudessaan. Hänen ei tulisi alkaa puhumaan desimaaliluvuista tai raja-arvoista ensinnäkään, jollei hän kykene selventämään oppilaille, mitä nämä käsitteet oikeasti tarkoittavan määritelmineen ja korjaamaan oppilaiden virhekäsitykset. Opettajan tehtävänä on luoda ristiriidaton tilanne, jossa erilaiset matemaattiset lähestymiskulmat eivät taistele toisiaan vastaan vaan kykenevät täydentämään toisiaan siinä mielessä, että kokonaiskuvan hahmottaminen selkeytyy oppijoille.

Tall (1976) tutki katastrofiteorian mallinnusta, jossa lähdetään tutkimaan opiskelijoiden näkökulmia, jotka ensisijaiset lähestymistavat huomaamattaan poissulkee.

Tall lähtee siitä oletuksesta liikkeelle, että on kaksi eri lähestymistapaa - A ja B - tietyn kysymyksen perusteltuun vastaamiseen. Näiden välissä on lisäksi ristiriitatekijä C, joka ohjaa oppilasta kumoamaan jomman kumman erilaisen lähestymistavan A tai B.



Kuva 1. (Tall, 1979)

Oppilaan saadessa lisätietoa aiheesta hän alkaa kallistumaan vaihtoehdon A suuntaan, jolloin vahvistaakseen tätä näkemystä ja mukavuusalueellaan olemista, ristiriitatekijä C siirtyy kohti vaihtoehtoa B ja lopulta kumoaa tämän lähestymistavan jättäen vain vaihtoehdon A jäljelle. Artikkelissaan Tall kutsuu tätä *yksinkertaisen ajattelun malliksi*.

Artikkelissa haastateltiin ensimmäisen vuoden matematiikan yliopisto-opiskelijoita, joilta kysyttiin lukujen (kysymys 4) 0,333… ja ⅓ sekä (kysymys 5) 0,999… ja 1 välisiä suhteita. Vastauksista Tall piti viiden oppilaan vastauksia mielenkiintoisimpana:

| | | |
|---|---|---|
| A | (4) | $0\cdot\dot{3} = \frac{1}{3}$ |
| | (5) | $0\cdot\dot{9} = 3\times\cdot\dot{3} = 3\times\frac{1}{3} =$ rubbish |
| B | (4) | $0\cdot333\ldots = \frac{1}{3}$ no fraction (this answer was crossed out) |
| | (5) | $0\cdot999\ldots =$ " " |
| C | (4) | $0\cdot\dot{3} = \frac{1}{3}$ |
| | (5) | $0\cdot\dot{9} = 1$ or (none exists) |
| D | (4) | $0\cdot\dot{3} = \frac{1}{3}$ |
| | (5) | $0\cdot\dot{9} = 0\cdot999$ |
| E | (4) | $0\cdot\dot{3} = \frac{1}{3}$ |
| | (5) | $0\cdot\dot{9} \approx 1.$ |

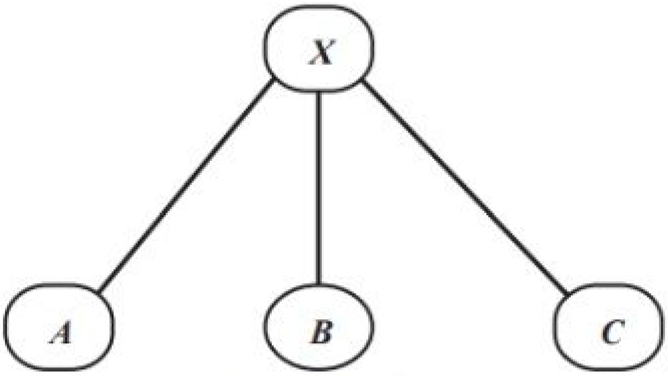
Kuva 2. (Tall, 1979)

Oppilas B oli aluksi hyväksynyt kysymyksen 4 todeksi, mutta kohdatessaan kysymyksen 5 hän oli päättänyt palata kysymykseen 4 ja ruksia alkuperäisen vastauksensa yli. Oppilas E oli hyväksynyt kohdan 4, mutta lisännyt kohtaan 5 “~” -noin merkinnän.

Tallin mukaan nämä tapaukset kuvaavat erityisen hyvin sitä, mitä tapahtuu, kun liikutaan ihmismielen *ristiriitaisen ajattelun vyöhykkeellä* (‘area of conflict’): syntyy sisäinen ristiriita mieleen, tulkitaanko desimaalilukua äärelliseksi lukuarvoksi vai raja-arvoksi, joka lähenee jotain tiettyä lukuarvoa kohti koskaan saavuttamatta sitä. Tallin mukaan ristiriitaisuus voi johtua siitä, että opiskelija ajattelee äärettömyyden käyttäytyvän samoilla ominaisuuksilla kuin reaaliluvut, eli äärettömän ‘luvun’ olevan yksi-yhteen sovitettavissa reaalilukujen kanssa. Miten ymmäretään ollessamme “tarpeeksi lähellä”? (Tall, 1976)

Katastrofiteorian mallinnuksen läsnäollessa Tall pohtii, onko ajatuksen johdonmukainen kuvaus tiedon siirtymävaiheessa mahdollista ylipäätänsä. Epäilemättä tällainen malli ei sallisi loogisesti ristiriitaisia tuloksia seuraten tiedetyistä oletuksista vain valitsemalla tarkoituksella erilaisia reittejä samaan johtopäätökseen. Ristiriitaisten johtopäätöksien, jotka löydettiin tiedon siirtymävaiheessa, läsnäollessa saattaa olla niin, että mikä tahansa ajattelumalli tässä vaiheessa käyttäen klassista loogista ajattelua päätyy sisäisiin ristiriitoihin. (Tall, 1976)

Mallien soveltamisessa on aina riskinsä, Tall kertoo. Riskinä on se, että mallit tulkitaan väärin. Alla olevan kaavion idea on avata kyseistä ongelmaa. Jos konsepti *X* on konseptien *A, B* ja *C* yläpuolella, sitä saatetaan tulkita niin, että ennen kuin voimme ymmärtää konseptin *X,* niin se on perusluonteista ymmärtää ensiksi konseptit *A, B* ja *C.*




Kuva 3. (Tall, 1976)

Päinvastoin voi tapahtua niin, että ymmärrettäessä ensiksi konseptit *A* ja *B*, ja sen jälkeen *X* saattaa asettaa konseptin *C* etevästi kontekstiin. Älykäs oppiminen voi toimia tätäkin kautta. Tässä on vaarana yksinkertaistaa yleispätevää kaavaa matematiikalle. Tällaisella käsityksellä voi olla positiivisia vaikutuksia kuvailtaessa mitä tapahtuu kognitiivisen kehityksen alkuvaiheessa, mutta korkeammalla vaikeusasteella ei ole välttämättä selvää, miten kaaviota tulkitaan. (Tall, 1976)

Tall kertoo, että katastrofimalli vahvistaa opettajan tärkeää roolia johdattaa oppijaa kurssin vaatimiin tavoitteisiin. Kurssin sisältöjen selitykset opettaja antaa kokonaiselle luokalle yhdellä kertaa, mutta sensitiivinen opettaja kykenee tunnistamaan konfliktien esiintymistä oppijoiden mielissä. Tarkka selvitystyö saattaa paljastaa ajattelutavan estot kohti äkkinäisiä katastrofihyppäyksiä tai jopa ainoastaan yhden päättelyketjun muodostamista. Tällöin on opettajan tehtävä tunnistaa konflikti oppijan ajattelussa ja korjata se sopivalla tavalla. Oppija ei välttämättä itse edes kykene tunnistamaan ajattelutavassa esiintyvää konfliktia, missä kohtaa päättelyketjua konflikti sijaitsee. Taito löytää yksilön ongelmat poistaen konfliktit ajattelutavasta on tämän tutkimuksen pääsanoma. (Tall, 1976)

### 3.2.4 Äärettömyys intuitiivisesti

Fischbein, Tirosh & Hess (1979) tutkivat kvantitatiivisesti oppilaiden ymmärrystä äärettömyydestä erilaisissa matemaattisissa tilanteissa. Tutkijat näkevät äärettömyyden tärkeänä käsitteenä, jonka ymmärtäminen ristiriidattomasti sisällyttäen kokonaisia matemaattisia käsitteitä saattaa antaa opiskelijalle mahdollisuuden hyväksyä äärettömyyden todenmukaisuus. On olemassa ideaalinen ja aito matemaattinen rakenne, jota ei voida kyseenalaistaa loogisena käsitteenä. Tästä on juuri kysymys äärettömyydessä - hyväksymällä määritelmät, teoreemat ja loogiset todisteet ovat yksi puoli asiasta. Toinen puoli on käyttää äärettömyyden käsitettä erilaisissa todellisissa psykologisissa yhteyksissä, jotka vaativat ajattelua ja tulkintaa prosessien läpikäymiseen.

Väite *"jos A > B ja B > C, niin A > C"* on esimerkki tällaisesta laajasti intuitiivisesti hyväksytystä totuudesta. Pitää kuitenkin muistaa, etteivät kaikki intuitiivisesti hyväksytyt väitteet ole aina itsestäänselvyys tai oikein.

Fischbein, Tirosh & Hess (1979) tekivät kyselyn ala-astelaisille ja ylä-astelaisille. Kyselyssä kysyttiin muun muuassa seuraavia kysymyksiä:

1) Olkoon meillä jana AB, jonka keskellä sijaitsee piste H. Tämän jälkeen jaamme janan AH kahteen osaan siten, että janan AH keskipisteestä P kyseinen jana jaetaan kahteen osaan. Saman teemme janalle BH. Tällaista puolittamista jatketaan eteenpäin samalla tavalla. Kysymys kuuluu - saavutetaanko koskaan sellaista tilannetta, jossa osat tulevat niin pieniksi, ettemme kykene enää jakamaan janoja puolittain? Perustele vastauksesi.

2) Olkoon meillä jana AB ja valitaan siltä mielivaltainen piste C. Jaamme janan kahteen yhtä suureen puolikkaiseen osaan janasta kuten teimme tehtävässä 1. Kysymys kuuluu - saavutammeko koskaan sellaista pistettä janalta AB jakojen jälkeen, joka yhtyy pisteeseen C?

Fischbein et al. myöntävät, että tehtävillä on intuitiiviset ideat äärettömyyden käsitteistä ja oppilaiden vastaukset eivät ole vain sattumanvaraisia vastauksia, vaan ne perustuvat johonkin. Vastauksia tuli hyvin vaihtelevasti. Tutkijat uskovat, että toinen uskottava selitys tälle on se, että oppilaat jäljentävät aikaisempaa oppimaansa, jota on heille opetettu, esimerkiksi, että segmentti sisältää äärettömän monta pistettä, ja on niitä oppilaita, jotka eivät jäljennä tällaista perustelua.

Vaikka kahdenlaiset tulkinnat tehtävistä kuulostavat uskottavilta selityksiltä, tarkempi tehtävien perustelujen tarkastelu sallii tutkijat hylkäämään selityksen. Kaikki äärellisyyteen pohjautuvat perustelut eivät olleet "konkreettisia", ja kaikki äärettömyyteen pohjautuvat perustelut eivät olleet "puhdasoppisia". (Fischbein & co., 1979)

Jakoa kahteen selvään eri vastauskategoriaan ei voida selittää vain opettamisen seurauksesta tai henkilökohtaisesta tulkintatavasta riippuen. Lisämuuttuja, joka on enemmänkin fundamentaalinen, täytyy ottaa myös huomioon, ja tämä on ristiriita äärellisyyteen argumentointinsa perustavan henkilön ja itsessään äärettömyyden käsitteen välillä. Lähes 50% kaikkiin tehtäviin liittyen perustelevat, että segmenttiä ei voida jakaa loputtomasti, sillä "segmentti on rajallinen". (Fischbein & co., 1979)

Merkittävä hypoteesi Fischbeinin & co. tutkimuksessa oli se, että äärettömyyteen liittyvät intuitiot eivät olisi riippuvaisia opiskelijan iästä. Hypoteesi oli osittain oikeassa, sillä eri ikäluokkien sisällä (12-13 -vuotiaat, 14-16 -vuotiaat, ja tästä vanhemmat) "äärellisyyteen" (engl. *"finitists"*) ja "äärettömyyteen" (engl. "*infinists"*) uskovien määrä oli melko tasapuolista kuitenkin havaiten, että mitä vanhempi oppilas oli, niin sitä enemmän hän uskoi "äärettömyyteen" tutkimuksen kysymyksiin liittyen. (Fischbein & co., 1979)

Johtopäätöksenä tutkijat kertovat, että yksilöille intuition luonne äärettömyyksissä ilmenee kuin että se olisi ristiriitainen. Selitys tälle ovat loogiset ajatusmallit, jotka on omaksuttu ihmisten toimesta koulun ulkopuolisesta maailmasta. Jotta tällaisen oikean ristiriidan voisi selättää, niin ihmismieli on kykenevänen käsittelemään asiaa *potentiaalisen äärettömyyden* kautta. Tämä ristiriita esiintyy tutkijoiden tuloksissa siten, että osallistujien reaktiot ovat yleisesti jaettu kahteen eri kategoriaan: äärellisyyteen perustuvat ("*finite")* ja ei-äärellisyyteen perustuvat ajatukset ("*non-infinite"*). Äärellisyyteen perustuvat argumentit ovat vallitsevia suuntauksia. Ikä ja opetustavan vaikutukset voisivat selittää kahtiajakoa. Matematiikka opettaa oppilaita ajattelemaan yhdenmukaisesti. Ilman riittäviä intuitioita ja ilman turvautumista asianmukaiseen matemaattiseen kontrolliin, yhdenmukainen ajattelu saattaa huonontua monimutkaiseksi yhtälöksi. (Fischbein & co., 1979)

Toisaalta tutkijat tulkitsevat suurta osaa vastauksista niin, että ne tukevat oppilaiden pysyvää aatetta aiheeseen liittyen, mikä johtui heidän turvallisesta ajatteluistaan eli yritetään luottaa tuttuihin käsityksiin ja helppoihin, ymmärrettäviin selityksiin. Hyöty tällaisesta turvallisesta ajattelusta on se, että se selittää väärät intuitiot, toisin sanoen oppilaiden aihealueiden muuttumattoman ajattelutavan. Voidaan olettaa, että kummatkin muuttujat - turvallisen ajattelu ja looginen yhdenmukaisuus - työskentelevät yhdessä heikentäen oppilaiden näkemyksiä matemaattisiin äärettömyyksiin. (Fischbein & co., 1979)

Tall (1981) on muotoillut toisen todellisen äärettömyyden käsitteen, *äärettömyys mittaamassa lukuja* (engl. "*infinite measuring numbers"*), joka yleistää laskemisen käsityksen reaaliluvuista laajempaan lukujärjestelmään. Tämä vastaa formaalisessa matematiikassa laajennusta reaalilukujen kuntaan. Tällaisessa äärettömyyden käsitteessä janalla on kaksi kertaa enemmän äärettömän pieniä pisteitä kuin janalla, joka on pituudeltaan puolet toisen janan pituudesta. Tall väittää, että lasten kokemukset äärettömyydestä liittyvät enemmän käsitteeseen 'äärettömyys mittaamassa lukuja' ja ovat lähempänä epästandardien analyysin modernia teoriaa kuin kardinaalilukujen teoriaa. Esimerkiksi, Tall pyysi oppilaita arvioimaan erilaisia raja-arvoja, kuten:

$$\frac{n^2}{n^2+1} \text{ and } \frac{n^5}{(1.1)^n}$$

as $n$ tends to infinity. A student who wrote

$$\frac{n^2}{n^2+1} \to \frac{\infty}{\infty} = 1$$

was shown that a similar argument would give

$$\frac{n^5}{(1.1)^n} \to \frac{\infty}{\infty} = 1$$

Kuva 4. (Tall, 1981)

Oppilas vastasi, että "sama perustelu ei toimi jälkimmäisessä kohtaa, sillä nimittäjän ollessa suurempi äärettömyys, lopputulos olisi nolla". Tall väittää, että oppilaan intuitio perustuu hänen kokemukseensa, jossa oppilas on tottunut vertailemaan laskettavissa olevia mittaluokkia potentiaalisessa äärettömyydessä, ja tästä syystä ajattelu on enemmän sukua mitalliselle äärettömyydelle. (Tall, 1981)

Fischbeinin (1987) mukaan intuitiivinen tieto on itsestään selvä ajatus, jonka me hyväksymme varmuudella todeksi. Se on välitön, pakottava ja sanomattakin selvä ajatus, mikä johtaa yleistyksiin yli tieteen tutkimuksen rajojen. Fischbein teki eroa ensisijaisten intuitioiden ja toissijaisten intuitioiden välille. Ensisijaiset intuitiot Fischbein kuvasi intuitioiksi, jotka “kehittyvät yksilöissä itsenäisesti missä tahansa systemaattisessa ohjelmassa heidän henkilökohtaisten kokemusten seurauksena”. Toissijaiset intuitiot Fischbein kuvasi intuitioiksi, jotka “hankitaan, ei luonnollisten kokemusten kautta, vaan sivistyksellisten opetuksien kautta”. Toissijaiset intuitiot kuvailtiin todisteeksi siitä, kun formaalisesta tiedosta tulee välitöntä ja ilmeistä. Toissijaiset intuitiot jostain tietystä käsitteestä tai prosessista ovat usein epäjohdonmukaisia suhteessa ensisijaisiin intuitioihin koskien samoja käsitteitä. (Fischbein, 1987)

### 3.2.5 Paradoksien rooli matemaattisen ajattelun kehittämisessä

Paradokseilla on ollut tärkeä rooli matematiikan historiallisessa kehityksessä, monet matemaatikot ovat olleet esimerkiksi haltioissaan, kun heidän tuotoksensa ovat päättyneet paradokseihin. Movshovitz-Hadar ja Rina-Hadass (1990) tutkivat tästä aiheesta, minkälaisia rooleja paradokseilla voi olla matematiikan opetusta kehitettäessä ja miten ne laajentavat oppilaiden matemaattista ymmärrystä.

Opetuksessa paradokseilla voidaan nostattaa oppilaiden motivaatiota matematiikan oppimiseen. Arkipäiväisestä opetuksesta paradoksit ovat poikkeus, jotka saavat oppilaiden mietinnät syvemmälle matematiikan maailmaan. Movshovitz-Hadar ja Rina-Hadass huomasivat tutkimuksessaan, kuinka oppilaat olivat hämmentyneitä ja pöyristyneitä siitä, miten he olivat astuneet paradoksisiin loukkoihin ja ymmärtäneet asiat väärin, vaikka oppilailla oli vankat intuitiot oikeassa olemisen suhteen. Yläasteen matematiikkaan liittyvät paradoksit saattavat pistää yliopistotaustaisenkin opiskelijan kognitiiviseen ristiriitaan. Tästä seuraa se, että kyseiset tilanteet voivat olla potentiaalisesti kehittäviä askeleita tulevaan opetukseen, jos opettajat kykenevät tunnistamaan tilanteita ja oppilaiden ajattelumalleja, ja johdattamaan perustellusti oppilaat oikeaan ratkaisuun ja selittämään, mikä heidän alkuperäisissä ajattelumalleissa meni pieleen. (Movshovitz-Hadar & Rina-Hadass, 1990)

Samat tutkijat huomasivat myös, että oppilas, joka yleensä ajattelee proseduraalisesti matematiikkaa, saattaa saada siirtymän toisenlaiseen ajattelutekniikkaan - relationaaliseen ymmärtämiseen. Tämä tarkoittaa sitä, että oppilas kykenee tarkastelemaan ongelmaa siihen liittyvien asioiden välisillä suhteilla, kytköksillä ja vuorovaikutuksilla toisiinsa. Opettajaksi opiskelevat oppilaat voivat tarkentaa omia opetustekniikoitaan tutkimalla paradokseja vaiheittain ja erottamalla eri välivaiheet toisistaan, sillä näiden avulla he tutustuvat matematiikan sisällä tapahtuviin ristiriitaisiin väittämiin, virheisiin, epätarkkuuksiin sekä yleisesti tunnistamaan matemaattisia virhetilanteita ja ristiriitatilanteita, joita he kykenevät tulevissa opetustilanteissaan aukaisemaan oppilaille ja tekemään paradoksista ymmärrettävämmän. (Movshovitz-Hadar & Rina-Hadass, 1990)

Movshovitz-Hadar ja Rina-Hadass jatkavat, että parhaimmassa tapauksessa tarpeeksi haasteellinen paradoksi parantaa oppilaan tietoisuutta ongelmanratkaisuun heurestisia ja meta-kognitiivisia strategioita. Tämä sopii parhaiten niille oppilaille, joiden kognitiiviselle perustalle on varaa rakentaa tämänkaltaisia ajattelumalleja, voidaan puhua keskimääräisiä oppilaita paremmista oppilaista. Toisaalta tutkijat korostavat, että tällaiseen opetustapaan liittyviä opetusmetodeja ei kannata itseisarvollisesti vain tuoda mukaan opetukseen opettamisen ilosta, vaan paradokseihin liittyvien ongelmien kanssa pitää tehdä perinpohjainen tutustuminen, kuinka paradoksi on järkevää tuoda mukaan oppitunnille ja millä lailla se soveltuu opetukseen, jottei se jäisi täysin irralliseksi kokonaisuudeksi ja pahimmassa tapauksessa jättäisi oppilaat vain hämmennyksen partaalle. (Movshovitz-Hadar & Rina-Hadass, 1990)

### 3.2.6 Konseptikuva ja -määritelmä

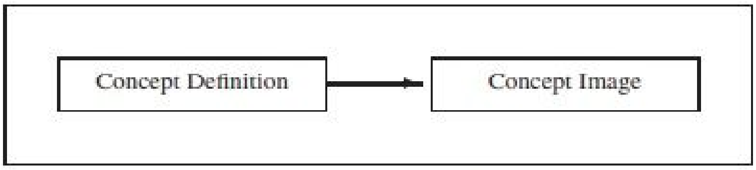
Barbara S. Edwards ja Michael B. Ward (2004) tutkivat oppilaiden kykyä käyttää matemaattisia määritelmiä heidän matemaattisten taitojensa kehittämisessä. Artikkelissa lähdettiin liikkeelle käsitteiden *konseptikuvan* (engl. *concept image*) ja *konseptimääritelmän* (engl. *concept definition*) määritelmistä, jotka Tall & Vinner (1981) määrittelevät näin:

“*Konseptikuva* voidaan kuvata kokonaisvaltaisena rakennelmana, joka on tekemisissä konseptin kanssa, joka taas sisältää kaikki mentaaliset kuvat ja konseptiin liitetyt ominaisuudet ja prosessit. Se rakennetaan vuosien ajan moninaisista kokemuksista, kunnes se muuttuu yksilön kohdatessa uusia virikkeitä ja yksilö aikuistuu.”

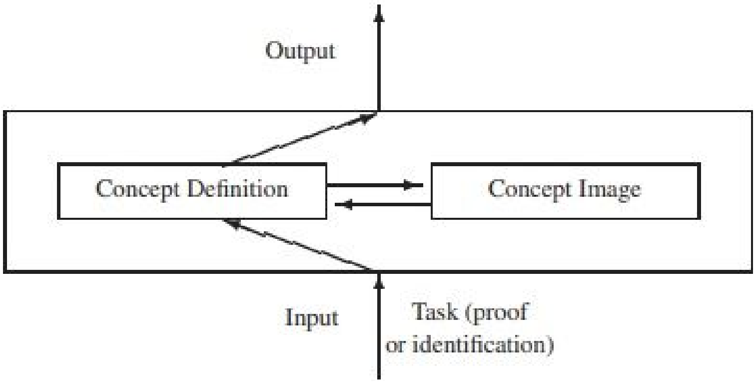
Konseptimääritelmä tarkoittaa lähes samankaltaista käsitystä kuin määritelmät yleensäkin matematiikassa erona siitä, että konseptuaalinen määritelmä on henkilökohtaista kaikille yksilöille eikä sitä voida yleistää:

“*Henkilökohtainen* konseptimääritelmä voi erota *formaalisesta* määritelmästä siten, että jälkimmäinen on yleisesti hyväksytty määritelmä laajan matemaattisen yhteisön toimesta.”

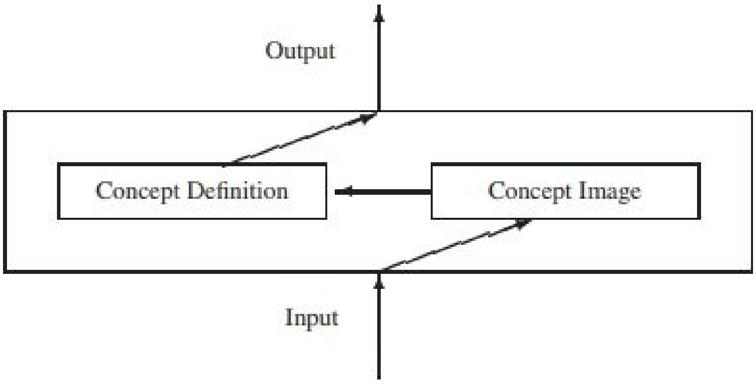
Edwards ja Ward (2004) kuvailevat konseptikuvan ja -määritelmän suhdetta toisiinsa seuraavanlaisesti: Henkilöllä on puhtaasti formaalista päättelyä, johon ei vielä kuulu minkäänlaista konseptuaalista kuvaa. Tämän jälkeen henkilölle tulee intuitiivista ajattelua, jonka hän yhdistää henkilökohtaiseen konseptimääritelmäänsä. Tästä seuraa matemaattisen tuloksen todistuksen yhteydessä se, että henkilö pohtii konseptimääritelmän ja -kuvan suhdetta toisiinsa, puntaroi, onko hänen mielikuvassaan mitään järkevää suhteessa omaan konseptimääritelmäänsä nähden. Tämän seurauksena ihanteellisin seuraus olisi se, että henkilö yhdistää täysin kehittyneen johtopäätöksensä konseptimääritelmän konseptikuvaansa, jolloin hänen henkiökohtaiselle määritelmälle löytyy selkeä kuva. Edwards ja Ward (2004) kuvailevat asiaa myös seuraavanlaisella kaaviolla:



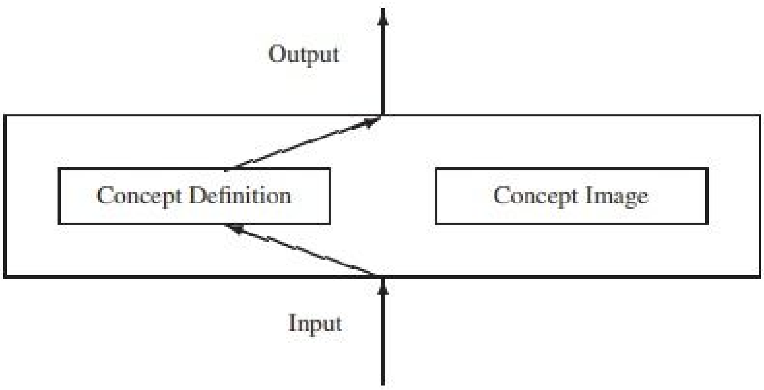

The idealized development of a formal mathematical concept




Interplay between definition and image




Deduction following intuitive thought

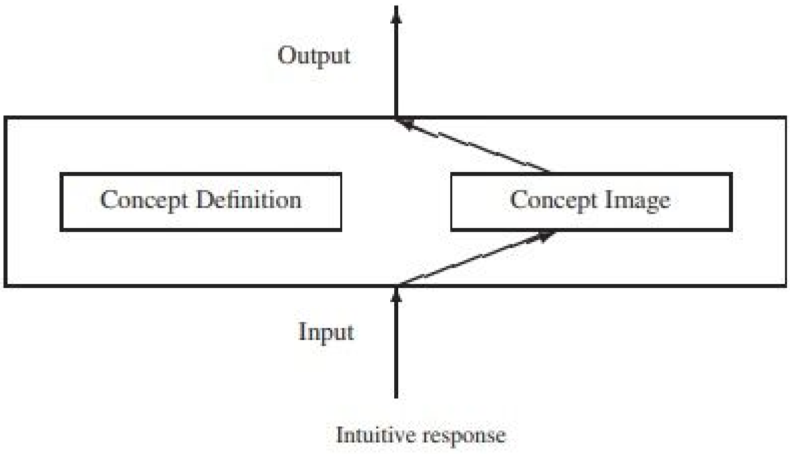



Purely formal deduction

Kuva 5. (Edwards & Ward, 2005)

On kuitenkin mahdollista, että oppilas saattaa soveltaa määritelmää matemaattisesti väärin ainakin kahdesta syystä. Ensinnäkin se saattaa johtua siitä, että oppilaalla voi olla vaillinainen tai vääränlainen ymmärrys konseptista, jota se kuvaa. Toiseksi, voi olla, että virhe sattuu opiskelijan ymmärtäessä matemaattisesti väärin matemaattisten määritelmien tarkoitusperiä yleisesti. Oppilailta kysyttäessä matemaattisista määritelmistä, he saattavat tietää näennäisen riittävästi formaalisten määritelmien roolista matematiikassa kuitenkaan ymmärtämättä matemaattisten määritelmien rooleja ja tarkoituksia. Ei ole poikkeuksellista oppilaille toistaa jotakin asiaa, josta he ovat kuulleet, kuitenkaan ymmärtämättä täysin sitä. Esimerkiksi oppilaat saattavat sanoa, ehkäpä miellyttääkseen opettajaa, että “matematiikkaa on välttämätöntä tietää elämän kaikilla eri osa-alueilla” kuitenkaan antamatta mitään konkreettista esimerkkiä yhteiskunnasta.

Edwards ja Ward (2004) jatkavat tutkimuksessaan sanoen, että oppilaat eivät hyödynnä matemaattisia käsitteitä niinkuin monet alaa jo pidempään opiskelleet matemaatikot tekevät, vaikka oppilailla olisi kykyjä ja edellytyksiä käyttää käsitteitä sujuvasti. Tutkimuksessa oppilas nimeltään Stephanie kykeni selittämään päättymättömän desimaaliluvun määritelmän hänen suorittamallaan analyysin kurssillaan. Stephanie kykeni selittämään, miksi 0,333… on yhtä kuin ⅓ määritelmän avulla. Kuitenkin häneltä kysyttäessä, onko 0,999… yhtä kuin 1, niin hän sivuutti määritelmän. Sen sijaan Stephanie käytti kysymykseen hänen henkilökohtaistaan konseptista kuvaansa, joka perustui jakokulmaan. “Lukua 0,333… voimme muuntaa murtoluvuksi ⅓, mutta lukua 0,999… emme voi näyttää murtolukuna 1/1.” Kun konseptimääritelmä oli konfliktissa hänen konseptikuvansa kanssa, konseptikuva voitti Stephanien mielessä. Ottaen huomioon hänen johdonmukaisen matemaattisten määritelmien kategorisoimisen Stephanie vaikutti ajatelleen, ettei konseptimääritelmä ollut aivan täydellisesti määritelty toistuville desimaaliluvuille luvussa 0,999…. Edwards ja Ward (2004) kuvaavat Stephanien ajatusmallia kyseisellä kaaviolla, jossa päätöksenteossa korostuu intuitiivinen reaktio:



Kuva 6. (Edwards & Ward, 2005)

Tutkijat päätyvät lopputulemassaan siihen, että oppilaat ovat taipuvaisia luottamaan enemmän omaan intuitiiviseen konseptikuvaan kuin konseptimääritelmään. Tämän korjaamiseksi tutkijat ehdottavat, että matemaattisten määritelmien erikoisluonnetta tulisi käydä läpi enemmän suoraan oppitunneilla kaikilla tasoilla, mutta erityisesti ensimmäisellä kurssilla, jossa perehdytään erityisesti todistusten laatimisiin. Opiskelijoiden tulisi harjoitella matemaattisten määritelmien käyttöä omien johtopäätöstensä prosesseissa. Vaikkakin voi olla niin, että oppilaat tulevat lopulta ymmärtäneeksi tavalla tai toisella matemaattisten määritelmien roolit, niin Edwards ja Wards (2004) ovat sitä mieltä, että olisi suositellumpaa käydä yhdessä opettajajohtoisesti tunnilla näitä asioita läpi kuin nojata siihen sattumanvaraisuuteen, että oppilas ehkä saattaa ymmärtää matemaattisten määritelmien tarkoituksia omalla ajallaan, jos tulee ymmärtämään.

## 3.2.7 Proseduraalinen ja konseptuaalinen tieto

Canobi (2009) määrittelee proseduraalisen tiedon siten, että se on toimenpide ja sarja teoista, jotka johdattavat henkilön tavoitteeseen. Tällöin henkilö tietää, millä teoilla saavuttaa erilaisia tavoitteita riippumatta siitä, ymmärtääkö hän kognitiiviset perustelut proseduurin suorittamiselle. Rittle-Johnsonin (2015) mukaan proseduraalinen tieto voidaan olettaa olevan algoritmejä, joissa etukäteen tiedetään tiettyjen toimintojen johtavan oikeaan lopputulokseen, jos toiminnot on suoritettu oikein; tai mahdollisia toimintoja, jotka on järjestettävä oikeaan toimintajärjestykseen ongelman ratkaisemista varten. Tällainen tietous kehittää ongelmanratkaisutaitoja, ja se on sidottuna tietynlaisiin tehtäviin, joissa proseduraalinen tieto kehittyy.

Äärettömyyteen liittyvien tehtävien kanssa tämä voisi tarkoittaa sitä, että oppilas ymmärtää, miten käyttää työkaluja esimerkiksi raja-arvojen laskemiseen, kun funktion f(x) x -arvo lähestyy ääretöntä, ja tätä tietoa harjoittelemalla tarpeeksi hän tulee vakuuttuneeksi sen käyttäytymisestä matemaattisessa ympäristössä välttämättä tietämättä, miksi funktio käyttäytyy tietyllä lailla äärettömässä, mutta toteuttaa proseduraalisesti matematiikan sääntöjä, jotka hän on omaksunut paikkansa pitäviksi.

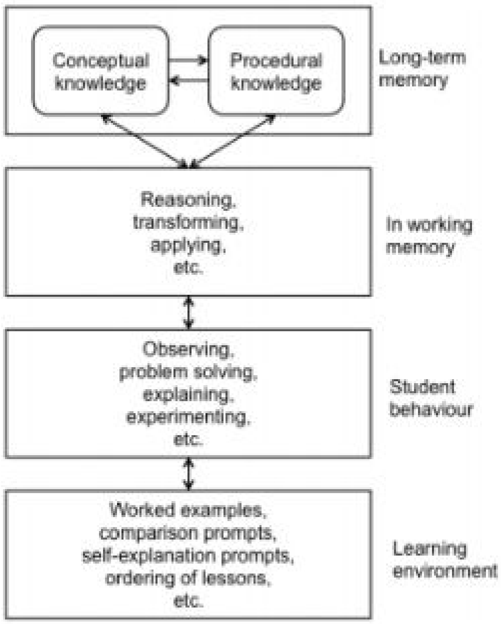
Sana konsepti määritellään 'abstraktiseksi tai yleiseksi ideaksi yleistettynä tietyistä tapauksista' (Merriam-Webster's Collegiate Dictionary, 2012). Tietoon konsepteista viitataan usein konseptuaalisena tietona (e.g. Byrnes & Wasik, 1991; Canobi, 2009; Rittle-Johnson, Siegler, & Alibali, 2001). Konseptuaalinen tieto ei yleensä ole sidottuna tietynlaisiin tehtävätyyppeihin. Tieto voi olla implisiittistä tai eksplisiittistä eikä sitä tarvitse välttämättä kirjoittaa sanoiksi (e.g. Goldin Meadow, Alibali, & Church, 1993). Yhdysvaltojen kansallinen tiedeneuvosto (National Research Council) määrittelee konseptuaalisen tiedon matematiikassa 'matemaattisten konseptien, laskutoimitusten ja suhteiden ymmärtämisenä' (Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001, p. 5). Tämäntyyppinen tunnetaan myös konseptuaalisena ymmärryksenä tai periaatteellisena tietona.

Hiebert (1986) näkee, että konseptuaalista tietoa voidaan kuvailla rikkaaksi tietojen keskinäisissä välisissä suhteissa. Sen voidaan ajatella olevan verkosto tiedoista, jossa tärkeät yksittäiset ja erilliset tiedonlähteet muodostavat järkevän kokonaisuuden. Toisaalta Baroody et al. (Baroody, Feil & Johnson, 2007) ehdottavat, että konseptuaalinen tieto tulisi määritellä 'tietoudeksi tosiasioista', jossa ei edellytettäisi eri tietolähteiden keskinäisiä yhteyksiä toisiinsa. Viimeaikaisten tutkimusten mukaan (Baroody, Feil & Johnson, 2007; diSessa, Gillespie, & Esterly, 2004; Schneider & Stern, 2009) eri tietolähteiden keskinäisiä yhteyksiä toisiinsa voidaan pitää piirteenä konseptuaalisesta tiedonajattelusta, mikä kuitenkin kehittyy yksilön ajatteluntasolla ymmärrettävämmäksi ajan myötä.

### Mitkä ovat näiden kahden erityyppisten tietojen välinen suhde toisiinsa?

Tähänpäivään mennessä proseduraalisen ja konseptuaalisen tiedon välistä kausaalista suhdetta on tarkasteltu neljästä eri näkökulmasta (cf. Baroody, 2003; Haapasalo & Kadijevich, 2000; Rittle-Johnson & Siegler, 1998): 1) Konseptuaalisesta näkökulmasta yksilö saavuttaa ensiksi konseptuaalisten tietojen ajattelutavan, minkä jälkeen hän hyödyntää näitä tietoja muodostaen proseduraalisen tiedon rakenteen, jolloin hän toistettujen harjoitusten jälkeen kykenee käytännössä operoimaan ja ratkaisemaan proseduraalisesti ongelmia (e.g. Gelman & Williams, 1998; Halford, 1993). Esimerkiksi yksilö oppii ensin matemaattisen teorian käsitteineen, minkä jälkeen hän kykenee soveltamaan ymmärtämäänsä teoriaa matemaattisen laskuharjoituksen parissa. 2) Proseduraalisesta näkökulmasta yksilö oppii ensiksi operoimaan proseduurien avulla, ja asteittain hän kykenee muodostamaan konseptuaalista tietoa abstraktien prosessien kautta, esimerkiksi uuden representaation avulla, jolloin luodaan uudenlainen kuva samasta asiasta (e.g. Karmiloff-Smith, 1992; Siegler & Stern, 1998). Esimerkiksi yksilö ratkaisee laskuharjoituksia mekaanisesti välttämättä tietämättä, mihin hänen käyttämänsä metodi teoreettisesti perustuu. Onnistuneen proseduraalisen suorituksen jälkeen yksilö saattaa ymmärtää, mihin eri teorioihin hänen suorittamansa metodi perustuu. 3) Passiivissuuntaisesta näkökulmasta (Haapasalo & Kadijevich, 2000) sekä konseptuaalinen ja proseduraalinen tieto kehittyvät itsenäisesti olematta riippuvuussuhteessa keskenään. 4) Iteratiivisesta näkökulmasta kausaalinen suhde on kaksisuuntainen, jossa yksilön konseptuaalisen tiedon kehittyessä proseduraalinen tieto kehittyy, ja päinvastoin (Baroody, 2003; Rittle-Johnson & Siegler, 1998; Rittle-Johnson et al., 2001).

Seuraavassa kuvassa käydään lävitse, miten nykyaikana voidaan ymmärtää konseptuaalisen ja proseduraalisen tiedon välistä kausaalista suhdetta:




Kuva 7: Potential components of an information-processing model for the relation between conceptual and procedural knowledge. (Rittle-Johnson & Schneider, 2006)

Matemaattinen kompetenssi pohjautuu konseptuaalisen ja proseduraalisen tietojen kehittämiseen (Rittle-Johnson & Schneider, 2001) ja niiden kaksisuuntaisen ja iteratiivisen suhteiden välille, joista sivulla 27 mainittiin. Opetuksessa on tärkeää, että nämä asiat otetaan huomioon ja oppilaiden proseduraalisia ja konseptuaalisia tietoja kehitetään monialaisesti.

### 3.2.8 Äärettömyyden käsite opettaja-opiskelijoille

Pessia Tsamir (1999) tutki tulevien matematiikan opettajien tietämystä niiden välillä, jotka olivat käyneet Cantorin joukko-oppiin perustuneen tukikurssin tavallisten yliopiston matematiikan kurssien lisäksi, ja ne, jotka olivat käyneet vain tavallisia yliopiston matematiikan kursseja. Tutkimuksessa erityisesti käsiteltiin siirtymävaihetta äärellisten joukkojen keskinäisistä vertailusta äärettömien joukkojen keskinäisiin vertailuihin.

Oppilailta pyydettäessä vertailemaan alkioiden lukumääriä kahdessa äärettömässä joukossa, oppilaat käyttivät erilaisia metodeja vertailuihin, jotka kuitenkin johtivat väistämättömiin ristiriitoihin. Esimerkiksi pyydettäessä vertailemaan luonnollisten alkioiden lukumäärää joukossa A ja joukossa B, johon kuului positiiviset parilliset luvut, välillä, oppilaat käyttivät inkluusio- ja 1:1 -vastaavuusmenetelmiä. Inkluusiomenetelmän käyttö (todistettaessa, että kahdella eri joukolla on eri määrä alkioita niin, että joukossa, joka sisältyy toiseen joukkoon, on vähemmän alkioita) sai oppilaat päättelemään, että äärettömillä joukoilla on aina eri määrä alkioita toisiinsa nähden. Käytettäessä 1:1 vastaavuusmenetelmää (todistettaessa, että kahdella eri joukolla on sama määrä alkioita, koska toisen joukon alkio voidaan aina liittää yksikäsitteisesti toisen joukon alkioon), osa oppilaista päätteli, että äärettömillä joukoilla onkin sama määrä alkioita. Oppilaat usein hyväksyivät samaan ongelmaan nämä kummatkin perustelut tosina. (Tsamir, 1999)

Kurssi Cantorin joukkoteoria kehittää tulevien lukiotason matematiikan opettajien tietämystä välttämään kiistanalaisia vertailutapoja, kun äärettömiä joukkoja verrataan toisiinsa. (Tsamir, 1999)

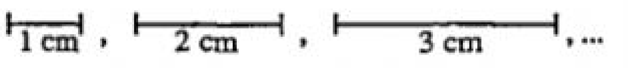
## 3.3 Äärettömyyden esitysmuotoja

Dina Tirosh ja Pessia Tsamir (1996) tekivät kyselyn 10., 11. ja 12. -luokkalaisille erilaisista representaation rooleista liittyen oppilaiden intuitiiviseen ajatteluun äärettömyydestä. Tutkijat halusivat tehdä aiheesta tutkimuksen, koska heidän mielestään äärettömyyden representaatiosta koulumaailmassa ei olla tehty tarpeeksi tutkimuksia, vaikka äärettömyyden käsite on keskiössä monessa matematiikan asiassa. Kyselyssä painotettiin geometrian ja aritmetiikan äärettömyyden ymmärrystä.

Tutkimuksessa käytettiin seuraavanlaista tutkimuskyselyä, jonka tarkoituksena oli havainnollistaa geometristen ongelmien representaatiota:

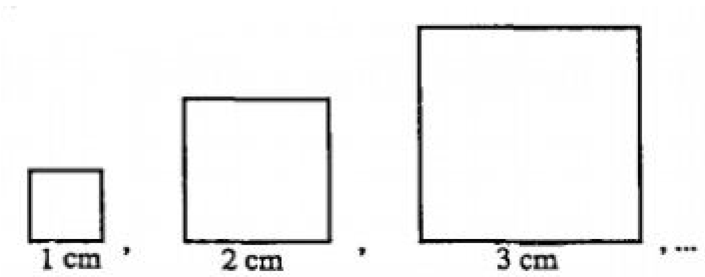
Olkoon meillä seuraavat joukot:

1. Ääretön joukko janoja:




Ensimmäinen jana on 1 senttimetriä pitkä, ja jokainen seuraava jana on yhden senttimetrin verran pidempi kuin sitä edellinen vasemmalla.

2. Neliöiden joukko

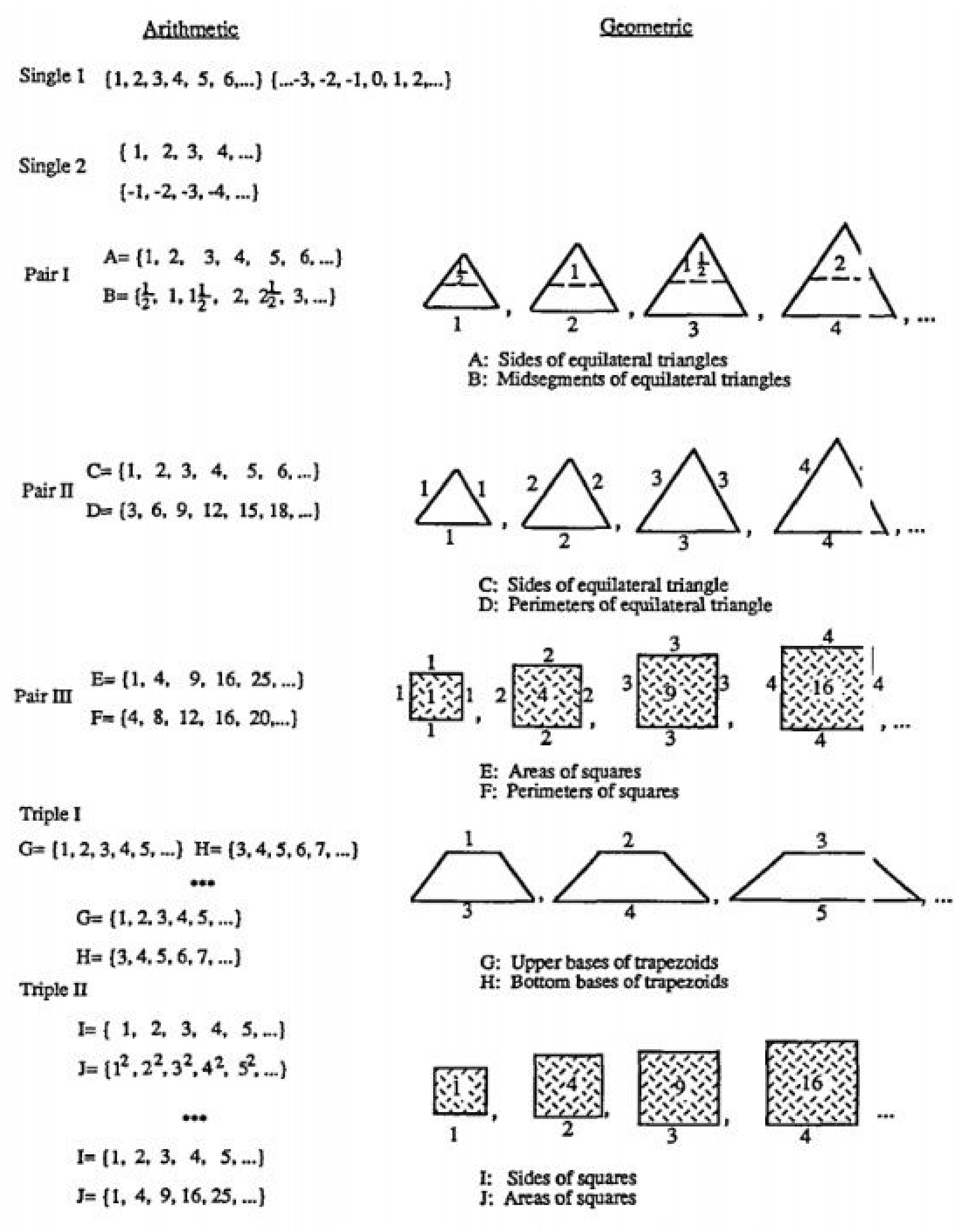



Ensimmäisen neliön sivun pituus on 1 senttimetri ja jokaisen seuraavan neliön sivun pituus on 1 senttimetriä pidempi edelliseen neliöön nähden.

Joukko *A* on pituuksien joukko tehtävästä 1, eli *A* = {1, 2, 3, 4, 5,...}

Joukko *B* on neliöiden pinta-alojen joukko tehtävästä 2, eli *B* = {1, 4, 9, 16,...}

a) Kummassa joukossa *A* vai *B* on enemmän alkioita?
b) Perustele vastauksesi.




Kuva 8. Luonnosmainen representaatio tehtävistä. (Tirosh & Tsamir, 1996)

Tehtävissä oli annettu joko pari kahdesta erilaisesta joukosta, joiden alkioiden lukumäärää tuli verrata toisiinsa (single I ja single II) tai tehtävänä oli tutkia kuvion eri suureiden välisten lukuarvojen suhteita keskenään, esimerkiksi neliön piiri ja sen pinta-ala (pair III). Samaa kuviota suurennettiin, mutta muoto pysyi samana, ja lukuarvoista tehtiin joukot, joissa alkioina olivat lukuarvot. Oppilailta kysyttiin kahden eri joukon vertailuissa, kummassa joukossa on enemmän tai yhtä paljon alkioita. Eniten "yhtä paljon" -vastauksia oli annettu numerollisesti täsmällisiin joukkoihin ({1, 2, 3, 4, 5,...} vrt. {-1, -2, -3, -4, -5,...}) ja vähiten "yhtä paljon" -vastauksia tuli numeerisesti horisontaalisiin joukkoihin ({1, 2, 3, 4, 5,...} vrt. {-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,...}).

Tirosh ja Tsamir huomasivat, että kahdentyyppisiä oppilaiden selityksiä nousi ylitse muiden, kun pohdittiin käsitystä "yhtä paljon alkioita" eri joukoissa: a) on olemassa vain yhdentyyppistä äärettömyyttä, ja b) yksi-yhteen -vastaavuudet kahden joukon välillä. Käsitys 'alkioiden lukumäärät kahdessa joukossa eivät ole yhtä suuret' selitettiin useimmiten sillä, että toinen joukko on toisen joukon osajoukko eikä täten joukot voisi olla alkioiden lukumäärien suhteen yhtä suuret, vaikka toinen joukko ei ollut täsmällisesti toisen joukon osajoukko, esimerkiksi {4, 8, 12, 16,...} ja {1, 4, 9, 16,...}. Oppilaat käyttivät vertailuja muodostaessaan viiden perättäisen luvun joukkoa siten, että ensimmäisestä edellä mainitusta joukosta ero seuraavaan lukuun pysyy vakiona eli neljänä, kun taas jälkimmäisessä joukossa ero seuraavaan lukuun kasvaa aina yhdellä. Tällaista strategiaa käyttäen oppilaat päättelivät, että ensimmäisessä joukossa olisi enemmän alkioita kuin jälkimmäisessä, koska ensimmäinen joukko pysyy oppilaiden mielestä tiiviimpänä kuin jälkimmäinen joukko. (Tirosh & Tsamir, 1996)

Kysymys, joka nousi useimmiten esiin, oli, että miksi tietynlaiset representaatiot samasta ongelmasta toivat esille varmoja vastauksia, kun taas toiset kysymykset saivat aikaan erilaisia vastauksia? Tiroshin ja Tsamirin arvaus on se, että ongelman visuaalisella representaatiolla on suuri rooli oppilaan käsityksestä äärettömyydestä. Kummassakin niin numerollisesti täsmällisissä että geometrisissä representaatioissa kaksi ääretöntä joukkoa oli asetettu rinnakkain niin, että joukkojen lukuarvot muodostivat parin toisen joukon "sopivan" lukuarvon kanssa (esimerkiksi neliö, jonka sivut yksi; neliö, jonka sivut kaksi; jne.) tai niihin liitettiin kuvainnollinen geometrinen relaatio (esimerkiksi puolisuunnikkaan ylä- ja alaosan pituudet). Tällaiset presentaatiot tuottivat oppilaille vahvoja visuaalisia kuvia, jotka tukivat heitä tarttumaan eri joukkojen välisten lukuarvojen pariutumiseen ja yksi-yhteen -vastaavuuksiin. Visuaalista samanlaisuutta tässä tapauksessa voidaan ymmärtää myös siten, että jos tanssisalissa miehet ja naiset tanssivat pareina ja kukaan ei seiso yksin, niin tiedetään välittömästi, että miesten ja naisten lukumäärä salissa on sama, jos oletetaan tanssiparin muodostuvan aina miehen ja naisen välille. Kuitenkin eri representaatiot, erityisesti numeerisesti horisontaalisia joukkoja koskien, saattoivat johdattaa opiskelijat tutkimaan jokaista joukkoa erillisenä itsenäisenä kokonaisuutena ja tämän jälkeen yrittäen vertailla alkioiden kokonaislukumäärää eri joukkojen välille. Tällainen lähestymistapa yleensä johtaa tutkimukseen, jossa tutkitaan eri joukkojen sisällettyjä yhteyksiä eri joukkojen välillä. Kyseisen yhteyden poissaollessa saatetaan päätyä uudelleen siihen johtopäätökseen, että kahdella joukolla on yhtä paljon alkioita, koska kummassakin on alkioita ääretön määrä. (Tirosh & Tsamir, 1996)

Tirosh ja Tsamir pohtivat, mitä hyötyä heidän tutkimuksellaan on matematiikan opetukseen. Tieto koskien keskinäistä riippuvuutta presentaatioiden moninaisten käytäntöjen välillä tiettyä erityistä ongelmaa kohti ja näistä tyypilliset aikaansaavat reaktiot oppilaiden toimesta ovat erittäin tärkeitä opetuksen suunnittelussa. Tällainen tieto on korvaamatonta monimutkaisen aiheen suunnittelemiseen, kun käytetään vastakkais-intuitiivisiä vertailuja esimerkiksi erityyppisten äärettömien joukkojen kesken. Nämä aiheet eivät ainoastaan vaadi teorian tai määrittelyn analyyttistä ohjeistusta, mutta myös saa johtopäätökseen erikoishuomiota intuitiivisista järjestelmistä, jotka saattavat kilpailla, tai tukea, jo aiemman opitun formaalisen osaamisen kanssa. (Tirosh & Tsamir, 1996)

Kaksi lähestymiskulmaa opetukseen tutkimuksen aiheeseen liittyen ovat analoginen opetustapa ja konfliktipainoitteinen opetustapa. Opetettaessa analogisesti niin eksplisiittisen numeerista kuin geometristä representaatiota voidaan käyttää opetuksen oppimisen uuden asian ymmärtämisen sitovina tehtävinä, koska ne laukaisevat halutut vastaukset intuitiivisesti. Silti on mahdollista opettaa oppilaille ei-triviaalisti, että nämä uutta oppimista sitovat tehtävät ovat identtisiä kohdetehtäviin nähden, toisin sanoen samojen tehtävien horisontaalinen representaatio, joka yleisesti saa esille puolittain oikeat vastaukset. Konfliktiperäisessä opetuksessa konflikti saattaa johtua saman ongelman esittämisestä eri muodoissa: horisontaalinen representaatio, joka tuottaa puolittain oikeita vastauksia, ja geometrinen representaatio laukaisee yksi-yhteen -vastaavuuksia opiskelijan reaktioihin. Tiroshin ja Tsamirin alkuperäiset tutkimukset ehdottavat, että kyseisissä konfliktitilanteissa runsas määrä oppilaita oli taipuvaisia luottamaan yksi-yhteen -vastaavuuspäätelmään. He näkivät geometrisen representaation enemmän uskottavampana ja omilla tavoillaan todistuksena siitä, että eri äärettömillä joukoilla on sama määrä alkioita. Silti jotkut oppilaista liittävät yhden ongelman aina eri representaatioon ikään kuin ongelma olisi erilainen toisenlaisella tavalla esitettynä. Opettajan olisi tärkeää korostaa opastaa opiskelijoita tunnistamaan ongelmien samankaltaisuus, kun ja vaikka ne on esitetty eri muodoissa. (Tirosh & Tsamir, 1996)

## 3.4 Potentiaalinen ja todellinen äärettömyys

Tutkijat (Ed Dubinsky & co.) palaavat aina muutaman tuhannen vuoden päähän, jolloin Aristoteles esitteli filosofisia näkemyksiään äärettömyyden kahtiajaolle - *todelliselle äärettömyydelle* ja *potentiaaliselle äärettömyydelle.* Tällaisella kahtiajaolla Aristoteles halusi ratkaista äärettömyyteen liittyvien paradoksien ongelmia kumoamalla, ettei todellinen äärettömyyttä olisi olemassakaan, mikä jättäisi jäljelle vain käsitteen potentiaalinen äärettömyys, jolla voitaisiin käsitellä äärettömyyteen liittyviä paradokseja.

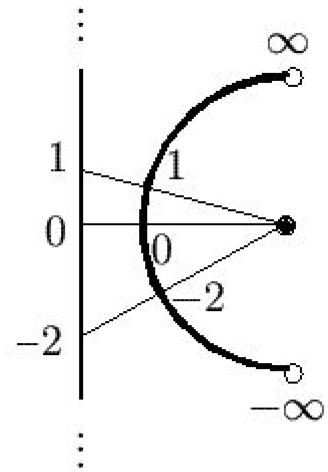
Aristoteles halusi aikanaan arvioida, onko mikään avaruudessa ja ajassa ääretöntä. Aristoteleen arvion johti siihen, että hän määritteli äärettömyyden siten, ettei sen läpi, alusta loppuun, kyetä mennä. Kuvainnollisesti hän oli sitä mieltä, että jokainen uusi askel, esimerkiksi ympyrän kehää pitkin, oli erillinen tapahtuma sitä aikaisempaan ja seuraavaan askeleen nähden. Täten tämän määritelmän mukaan ympyrän kehää ei voitu pitää äärettömänä, koska jokainen askel oli aina sarjan ensimmäinen, jolloin äärettömän monesta askeleesta syntyi kokonaisuus, jossa jokainen askel on aina ensimmäinen sarjassa. Tähän liittyen Aristoteles ei pitänyt luonnollisten lukujen joukkoa äärettömänä, mutta joka kuitenkin piti sisällään potentiaalisen äärettömyyden, sillä hänen mukaansa ihmisellä ei riittäisi aika luettelemaan kaikkia lukujoukon alkioita. Aristoteles kuvasi todellisen äärettömyyden olevan "ääretön nykyhetki" tietyllä hetkellä ajan suhteen.

Aristoteleen teoreeman pohjalta filosofi Immanuel Kant (1724-1804) uskoi ihmisten olevan äärellisiä olentoja äärellisessä maailmassa. Hänellä oli vielä vuosisatojen jälkeen samanlainen ajatusmalli äärettömyydestä kuin Aristoteleellä, joka "piti jotain äärettömänä, jos määrä määrältä kykenemme aina ottamaan joukosta jotain sen ulkopuolelle."
Eric Schechter (2009) kertoo potentiaalisen äärettömyyden viittaavan toimintamalliin, joka lähestyy lähemmäksi ja lähemmäksi ääretöntä loppua, muttei koskaan saavuta sitä. Esimerkkeinä seuraavien lukujen jono on sellainen: 1, 2, 3, 4, 5,... Lukujono kasvaa aina suuremmaksi, mutta sillä ei ole loppua: se ei koskaan saavuta äärettömyyttä. Schechter

jatkaa, että äärettömyys on vain viittaus johonkin suuntaan, että se on “jossain kaukaisuudessa”.

Aktuaalinen äärettömyys on Schechterin mukaan on sellainen, joka saavutetaan: prosessi on tällöin jo suoritettu. Esimerkiksi laitetaan aikaisemman lukujonon ympärille aaltosulkeet: {1, 2, 3, 4, 5,...}. Tällaisella notaatiolla osoitamme kaikki mahdolliset positiiviset kokonaisluvut. Kyseessä on vain yksi kohde eli joukko, joka kuitenkin sisältää äärettömän paljon alkioita. Toisin kuin potentiaalisessa äärettömyydessä, aktuaalisessa äärettömyydessä luvut eivät enää kasva joukossa, vaan joukolla on jo “valmiina” äärettömän monta alkiota.

Geometrisesti Schechter esittää aktuaalisen äärettömyyden seuraavasti:




Graafinen esitys näyttää yksi-yhteen -vastaavuuden äärettömän pitkän suoran pisteiden ja puoliympyrän pisteiden välillä. Suoralta emme saavuta tällä vastaavuudella positiivista tai negatiivista äärettömyyttä, mutta on luontevaa lisätä kyseiset “luvut” puoliympyrän päätepisteisiin. (Schechter, 2009)

# 4 Tutkimuskysymykset ja -tulokset

Tässä osiossa esitetään tutkielman tutkimuskysymykset, joihin tutkielma pyrkii vastaamaan.

## 4.1 Tutkimuskysymykset

1) Minkälaisia käsityksiä oppilailla on äärettömyydestä?
    - Minkälaiset mielikuvat vaikuttavat näihin käsityksiin?

2) Minkälaisia ajatusmalleja oppilailla on äärettömyydestä?

## 4.2 Tutkimusmenetelmät

Tutkimusmenetelmänä tässä tutkielmassa käytetään esitettyä teoriataustaa, johon pohjautuen tutkimuskysymyksiin löydetään vastauksia. Taustateoriassa on käsitelty erilaisia teoreettisia ajattelumalleja, joiden voidaan nähdä olevan läsnä oppilaiden pohtiessa äärettömyyden käsitettä. Lisäksi taustateoriassa tehtiin tutkimuskyselyitä oppilaille, jotka olivat eri ikäisiä ja osa kävi koulua eri maissa. Kyselyissä oppilailta kysyttiin heidän käsityksiään äärettömyydestä eri kysymys- ja representaatiomuotoja käyttäen.

## 4.3 Vastaukset tutkimuskysymyksiin

1) Luvussa 2.1 Tall (1976) oli löytänyt selkeästi havaittuja ristiriitaisuuksia: kun äärettömän desimaalilaajennusta ⅓ = 0,333…. kerrotaan luvulla kolme ja saadaan 1 = 0,999…, jotkut oppilaat olivat alkaneet epäröimään yhtäsuuruuden ⅓ = 0,333… yhtäpitävyyttä, sillä he kokivat ongelmaksi, tulkitaanko desimaalilukua äärelliseksi vai raja-arvoksi, joka lähestyy tiettyä lukuarvoa kohti koskaan saavuttamatta sitä.

Luvussa 2.6.1 Tirosh ja Tsamir (1996) olivat tutkineet oppilaiden kykyä hahmottaa erilaisia representaatioita äärettömyyteen liittyen. Tutkijat huomasivat, että tietynlaiset representaatiot samasta ongelmasta tuottivat varmoja vastauksia, kun taas toiset representaatiot niiden samasta ongelmasta tuottivat epäjohdonmukaisia vastauksia. Tutkijat olivat sitä mieltä, että tämä johtui visuaalisesta mielikuvasta, jonka oppilaat tekivät äärettömyydestä oman käsityksensä pohjalta. Esimerkiksi joukkojen A = {1, 2, 3, 4,...} ja B = {-1, -2, -3, -4,...} vertaileminen keskenään oli paljon helpompaa oppilaille kuin jos joukkoa A vertailtaisiin joukkoon C = { -3, -2, -1, 0, 1,...}.

Singer ja Voica (2003) olivat saaneet tutkimuksessaan opiskelijoilta heidän käsitykseen äärettömyydestä muun muuassa seuraavanlaisia vastauksia: “Äärettömyys on jotain, joka ei koskaan pysähdy; äärettömyys esiintyy, kun jokin ei koskaan lopu ja se jatkaa eteenpäin eikä koskaan pääty; pulpettien lukumäärä luokassa on äärellinen, koska pulpettien lukumäärä ei voi muuttua samalla tavalla kuin ääretön luku.” Tutkijat huomasivat, että oppilaiden ajatellessa äärellisyyden olevan jotain rajallista, niin tällöin kyseiset oppilaat ajattelivat äärettömyyden olevan jotain ei-rajallista, mikä on yleinen väärinkäsitys. Kysyttäessä oppilailta, kuinka monta pistettä he kykenevät luettelemaan rajalliselta janalta, oppilaat menivät mietteliäiksi, sillä he olivat mieltäneet janan rajalliseksi, mutta sen sisältämien pisteiden lukumäärä kuitenkin kasvoi rajatta. Samaisessa tutkimuksessa oppilaat olivat intuitiivisesti perustelleet väärin vertailtaessa kahta joukkoa, joista toinen sisälsi kaikki luonnolliset luvut ja toinen vain parilliset, sillä osan mielestä toinen joukko on mahtavampi, koska se sisältää kaikki luvut toisin kuin parillisten luonnollisten lukujen joukko. Vertailtaessa parittomien ja parillisten lukujen joukkoja perusteluina joukkojen yhtäsuuruuksille oli se, että kummassakin joukossa siirryttiin aina joka toiselle luvulle edelliseen nähden. Väärinkäsitykset tulevat selville tutkimalla eri joukkojen rajoja, sillä oppilaat uskoivat, että äärellisyys on jotain, jolla on rajat (esimerkiksi jana luvusta 1 lukuun 2). Tähän liittyen yleinen väärinkäsitys on se, että äärettömyys on jotain, jolla ei ole rajoja (esimerkiksi kaikkien luonnollisten lukujen joukko).

Singer ja Voica (2003) havaitsivat joidenkin oppilaiden sisäistäneen äärettömien joukon sisältämän matemaattisen intuitiivisen ajattelun. Kun oppilaiden perustelut ovat johdonmukaisia, niin ne näyttävät muodostuvan algebrallisen ja geometrisen ajatteluiden välille. Lisäksi Singer ja Voica (2003) toteavat, että äärettömyyteen liittyviä väärinkäsityksiä ilmenee tasaisesti eri ikäluokissa, kuten myös oikeaoppisten johtopäätösten kirjoittaminen matemaattiseen formaaliseen muotoon. Äärettömyyden intuitiivistä ajattelua ei voida siis yleistää mihinkään tiettyyn ikäluokkaan ainakaan tämän tutkimuksen yhteydessä, jossa se suoritettiin.

Hamza ja O'Shea (2001) havaitsivat tutkimuksessaan, että suurena vaikeutena äärettömyyden ymmärtämiselle on se, että oppilaat ovat tottuneet käyttämään tiettyjä termejä arkielämissään, joilla kuitenkin voi olla erilainen merkitys matematiikassa. Tutkimuksessa pyydettiin oppilaita vastaamaan heidän käsityksistään äärettömyydestä, johon he olivat vastanneet muun muuassa näin: "Luvun esitysmuotoa ei voida koskaan saavuttaa, koska seuraavaksi tulee aina isompi luku", "äärettömyys on isoin mahdollinen luku, mutta samalla kuitenkaan sitä ei ole olemassa. Tämä tarkoittaa sitä, ettei ole olemassa sellaista isointa lukua", "kutsuisin sitä niiden lukujen ominaisuudeksi, joilla ei ole loppua tai suurinta arvoa. Kutsumme äärettömyyttä teoreettisesti suurimmaksi luvuksi." Hamza ja O'Shea (2001) huomasivat tutkimuksessaan, että oppilaat olettivat numeroituvan joukon olevan äärellinen, koska he ajattelivat, että kaikki alkiot kyettäisiin fyysisesti laskemaan, kuten oppilaat ovat reaalimaailmassa tottuneet ajattelemaan esimerkiksi kynien lukumäärä penaalissa, minkä laskenta päättyy johonkin äärelliseen lukuun.

2) Luvussa 2.2 tutkitaan erilaisia ajattelumalleja, joita saatetaan käyttää pohdittaessa äärettömyyden merkitystä. Fischbein (2001) ottaa esille lukusuoran äärettömän pienen pisteen, jonka oppilas saattaa kyetä mieltää intuitiivisesti sellaiseksi, joka sisältään pienen pinta-alan lukusuoralta. Oppilaan ottaessa toisen pisteen samankokoiselta alueelta hän saattaa mieltää pisteet yhtä suuriksi. Fischbeinin mukaan väärinkäsitystä korjatessa parasta olisi siirtyä Cantorin proseduurien pariin, jottei oppilaan intuitio johda vastauksessa harhaan. Fischbein tunnistaa kaksi perustavanlaatuista mallia, joita oppilas saattaa ajatella huomaamattomasti ja joilla voi olla vaikutusta äärettömyyden käsitteen ymmärtämiseen: nähdä asia geometrisenä figuurina tai nähdä asia pisteiden joukkona. Kynän piirtämät jäljet saattavat väärentää päättelyketjun johtopäätöksiä. Fischbein korostaa tutkimuksessaan induktioon perustuvaa ajattelua, jolla vältettäisiin monimutkaisia konsepteja, joissa oppillailla

voi olla taipumuksia ajatella *mentaalisen mallin* kautta. Tälööin päättelykyky ohjautuu helposti lähestyttäviin ja vaihtoehtoisiin ajattelutapoihin, jotka jättävät huomioimatta hankalimpia käsitteen sisältöjä. Fischbein tutki, että kuvallisten mallien hiljainen vaikutus abstraktisten ja geometristen konseptien loogisuudesta johtaa vääriin tai ristiriitaisiin johtopäätöksiin, kun ollaan äärettömyyden kanssa tekemisissä.

D. O. Tall ja R. L. E. Schwarzenberger (1978) totesivat tutkimuksessaan, että oppilaiden käsittäessä tiettyjä matemaattisia käsitteitä väärin joko kielellisesti tai määritelmällisesti saattaa hidastaa heidän ymmärrystään äärettömyyttä koskien, jolloin erilaisten käsitteiden suhteet nähdään toisiinsa hyvin kaukaisina ja irrallisina - esimerkiksi tällaisia voivat olla päättymättömät desimaaliluvut ja raja-arvot. Tallin mukaan esimerkkitilanteessa oppilaalla saattaa olla kaksi erilaista lähestymistapaa, olkoon nämä A ja B, matemaattiseen ongelmaan. Oppilas löytää ristiriitatekijän C, joka siirtyy oppilaan saadessa lisätietoa kohti joko A:ta tai B:tä, jolloin oppilaalle jää yksi lähestymistapa tehtävään. Tall kutsuu tätä *yksinkertaisen ajattelun malliksi.*

Tallin (1978) mukaan liikutaan *ristiriitaisella ajattelun vyöhykkeellä,* kun oppilas pohtii esimerkiksi lukua 0,999… - tulkitaanko lukua desimaaliluvuksi vai raja-arvoksi, joka lähenee jotain tiettyä lukuarvoa koskaan saavuttamatta sitä. Ristiriitaisuus voi Tallin (1978) mukaan johtua siitä, että oppilas ajattelee äärettömyyden käyttäytyvän samoilla ominaisuuksilla kuin reaaliluvut, toisin sanoen äärettömän ‘luvun’ olevan yksi-yhteen sovitettavissa reaalilukujen kanssa. Katastrofiteoriassa Tall (1978) pitää vaarana sitä, että oppilas hakee liian yksinkertaisia matematiikan malleja konseptien ymmärtämiseksi. Luvussa 2.2.3 esitetty kaavio (kuva 1) näyttää havainnekuvana, kuinka eri konsepteja yhdistämällä saatetaan ymmärtää jotain uutta konseptia, mutta korkeammalla vaikeustasolla ei ole välttämättä selvää, miten kaavion konseptien riippuvuussuhteita toisiinsa tulkitaan. (Tall 1978)

Fischbein & co. (1979) olivat sitä mieltä, että pohdittaessa, miten oppilas tulkitsee äärettömyyttä, sitä ei voida vain selittää opettamisen seurauksena. Ristiriitaa aiheuttava ajattelu, joka huomattiin, oli oppilaan oma perustelunsa äärellisyyden käsitteeseen ja itsessään oikeaoppisen äärettömyyden käsitteen välillä. Oppilaan oma käsitys äärellisyydestä saattoi hankaloittaa äärettömyyden käsitteen ymmärtämistä. Se nähtiin olevan seurauksena siitä, että oppilailla on taustalla loogiset ajattelumallit, jotka ovat peräisin heidän omista kokemuksistaan koulun ulkopuolisesta maailmasta. Tällainen ajattelumalli voidaan selättää omaksumalla *potentiaalisen äärettömyyden* luonne. Tutkijat havaitsivat oppilaiden sijoittuvan pääasiassa kahteen eri kategoriaan tutkittaessa oppilaiden reaktioita äärettömyyteen: niihin, jotka uskovat äärettömyyden “äärellisyyteen”, ja “ei-äärellisyyteen” uskovat. Ilman riittäviä intuitioita ja ilman turvautumista asianmukaiseen matemaattiseen kontrolliin, yhdenmukainen ajattelu saattaa huonontua monimutkaiseksi yhtälöksi. Samalla tutkijat huomasivat, että oppilailla oli taipumusta ajatella äärettömyydestä turvallisesti, eli oppilaat luottavat tuttuihin käsityksiin ja helppoihin selityksiin, jotka he itse selkeästi ymmärtävät. Tämä auttaa oppilaita selättämään omat väärät intuitiot, kun oppilas tyytyy pitämään ajattelutapansa muuttumattomana. Kuitenkin tällainen turvallinen ajattelu liitettynä loogiseen yhdenmukaisuuteen heikentää yhdessä oppilaan näkemystä matemaattiseen äärettömyyteen. (Fischbein & co., 1979)

# 5 Pohdinta

Tässä luvussa pohditaan tutkimuksen tuloksia vastaten luvun 3 tutkimuskysymyksiin sekä yleisesti pohtien äärettömyyden merkitystä kouluopetuksessa. Lisäksi luvussa pohditaan myös tutkimuksen luotettavuutta ja jatkotutkimusideoita.

## 5.1 Oppilaiden käsityksiä äärettömyydestä

Itse selkeästi havaitsin kyselyihin osallistuneiden oppilaiden vastauksissa vahvastikin ristiriitaisuutta, tietynlaista epätietoisuutta. Osalle oppilaille äärettömyyden tietämys oli “jotain sinne päin” - sitä osattiin suunnilleen kuvailla, muttei täydellisesti kuitenkaan. Äärettömyyden ymmärtämiseen liittyi vahvasti se esitysmuoto, jonka kontekstissa äärettömyys esiintyi, esimerkiksi “sopivien” joukkojen vertailuissa oppilaat tiesivät hyvin oikeat vastaukset, mutta vertailtaessa toisenlaisia joukkoja, jotka intuitiivisesti näyttivät eri suuruisilta kokoluokilta, intuitio johdatti oppilaita harhaan, mikä vei oppilasta pois rationaalisesta ajattelusta. Tällöin oppilas saattoi tyytyä intuitioon, koska tällöin hänen ajattelunsa pysyi mukavuusalueella ja abstraktinen asia nähtiin selkeänä oppilaan mielessä. Oppilas näkee äärettömyyden niin abstraktisena, ettei hän kykene pääsemään käsiksi siihen. Mielestäni opettajan olisi tärkeää tuoda äärettömyys pienissä osissa mukaan opetukseen, mahdollisesti eri kursseilla raja-arvojen, geometristen summien, lukuteorian ja laajennettujen desimaalilukujen kanssa.

Oppilaalla saattoi olla myös hankaluuksia ymmärtää käsitteitä desimaaliluku ja raja-arvo. Mielestäni näiden kahden käsitteen ymmärtäminen hyvin auttaa esimerkiksi ymmärtämään lukua 0,999… paremmin. Tällöin oppilas voisi paremmin ymmärtää, että luku 0,999… pitää sisällään useitakin käsitteitä ja se voidaan nähdä monen asian summana. Ylipäätänsäkin matematiikassa, niin peruskoulussa kuin lukiossakin, on tärkeää nähdä matematiikan eri sisältöjen yhteys toisiinsa eikä vain tyytyä yksinkertaiseen ajatteluun intuitiivisesti: kuinka paljon matematiikkaa on tiedettävä ratkaistaakseen tehtävä ja mistä tunnistaa, minkälaista matematiikkaa pitää hyödyntää tehtävässä? Pedagogisesti siihen yksi ratkaisu on laittaa oppilaat harjoittelemaan proseduraalisesti laskuharjoituksia, ja kun tarpeeksi tehtäviä harjoitellaan uudestaan ja uudestaan, niin oppilaat alkavat paremmin tunnistamaan, mitä eri matemaattisia tekniikoita tulee hyödyntää kunkin tehtävän parissa.

Oppilaiden käsityksiin äärettömyydestä vaikuttaa mielestäni myös arkielämässä koettu näkemys äärettömyydestä ja siihen liittyvistä asioista. Niihin voi olla esimerkiksi opettajana hankala puuttua yleistävällä tavalla, koska oppilaiden näkemykset voivat olla hyvinkin yksilöllisiä ja toisistaan poikkeavia monesti. Tiettyjä samoja käsityksiä on yleisesti toki havaittavissa, kuten se, että äärettömyys nähdään usein “todella isona asiana, joka kasvaa rajatta”. Kuitenkaan tämä ei tarkoita, että äärettömyys kasvaisi rajattomalla alueella, vaan voi hyvinkin kasvaa rajallisella alueella, kuten pisteiden lukumäärä suljetulla janalla. Tässä tullaan mielestäni siihen, että oppilas on osittain oikeassa äärettömyyden suhteen sanoessaan sen kasvavan rajatta, mutta ristiriita voi näkyä jo heti nurkan takana, kun eteen lyödään rajallinen alue, jonka pisteiden lukumäärä kasvaa rajatta.

## 5.2 Opetuksellista pohdintaa

Suomen lukion opetussuunnitelmassa (2019) raja-arvoista puhutaan kurssilla ‘derivaatta’, joka on pitkän matematiikan kuudes kurssi. Lukuteoriasta puhutaan valinnaisella kurssilla ‘algoritmit ja lukuteoria’. Lyhyessä matematiikassa geometrisesta lukujonosta kerrotaan kurssilla MAB7, talousmatematiikka. Tästä sietää pohtia: onko äärettömyyden käsitettä jaoteltu opetussuunnitelmaan riittävästi äärettömyyden johdonmukaisen ymmärtämisen kannalta? Käsiteltäessä funktioiden raja-arvoja äärettömyydessä aikataulusta riippuen voi olla, että koko äärettömyyden käsite jää pinnalliseksi ja oppilaille jää proseduraalinen tapa käsitellä äärettömyyttä. Muuttujan $x$ lähestyessä positiivista ääretöntä funktiossa $f(x) = 1/x$ oppilas saattaa vastata “funktion lähestyvän lukuarvoa nolla koskaan saavuttamatta sitä”, mikä sinällään on oikein, mutta konseptuaalisen tiedon kannalta, onko se riittävää, että opitaan laskemaan oikein kuitenkaan konseptuaalisesti tietämättä tarkalleen, mitä vastaus tosiasiassa tarkoittaa - mitä ‘pisteen äärettömyys’ -ympäriltä tiedetään, koska emme sitä pysty ikinä fyysisesti saavuttamaan?

Joukko-oppia ei mainita opetussuunnitelmassa. Mielestäni jos halutaan ymmärtää äärettömyyden luonnetta täydellisesti, niin siihen vaaditaan Cantorin joukko-oppiteorian sisäistämistä. Tämä jättää puhtaan tietämyksen aukon kouluopetuksellisen äärettömyyden ymmärtämiseen, ja äärettömyys voi siksikin näyttäytyä monelle oppilaalle hankalana asiana. Opettajan olisi saatava oppilaat johdatettua pois abstraktiselta ajattelutasolta, jolloin intuitiiviset ideat äärettömyydestä jäisivät vähemmälle. Äärettömyys voisi toimia yleisenä toimeenpiteenä siitä, kuinka matematiikkaa voidaan ymmärtää, koska se on ihmisten kehittelemä tiede ja sille on tarkat määritteet, jotka eivät huomioi ihmisten ‘tuntemuksia’ tai ‘vaistoja’ - äärettömyyteen ei päde arkielämän lainalaisuudet.

## 5.3 Luotettavuus

Tutkimuksen luotettavuus nojaa aikaisimmille tutkimuksille, jotka ovat käsitelleet äärettömyyttä ja oppilaiden ajatusmalleja. Periaatteellinen kuva oppilaiden ajatuksista saatiin tämän tutkimuksen teoriakatsauksesta, josta syntyi tietynlainen kuva oppilaiden ajatusmalleista ja virhekäsityksistä. Vaikka tutkimus oli teoriapohjainen, mitään yleispätevää kaavaa oppilaiden virhekäsitysten korjaamiseksi on hankala tehdä, koska virhekäsitykset syntyvät yksilöiden omista kokemuksista ja intuitioista, jotka kaikki voivat poiketa toisistaan. Tutkimuksessa tehtiin myös kyselyitä eri puolilla maailmaa ja mahdollisesti eri vuosikymmeninä, joten tietynlaista tasavertaisuutta kyselyihin ei tullut, kun osallistujien lähtökohdat olivat kovin erilaisia, mutta jokaisesta kyselystä saatiin aina jotain uutta selville.

Taustateoriassa esiintyvien tutkimusten johtopäätösten luotettavuus pohjautuu toisten tutkijoiden näkemykseihin ja havaintoihin, joihin minä tämän oman tutkimukseni tekijänä turvaudun ja yritän nähdä, miten toisten tutkijoiden tutkimukset sopivat työni kokonaisuuteen ja minun tutkimukseni aiheeseen. Tutkijoilla on omissa tutkimuksissaan omat tulkintansa ja näkemykset, ja minä yritän niitä toisiinsa yhdistämällä saada isompaa kuvaa hahmotelluksi. Työni luotettavuus perustuu osittain myös siihen, kuinka hyödyllisinä olen kokenut taustakirjallisuuteen liittyvät tutkimukset oman tutkimukseni kannalta ja miten olen tulkinnut niiden edesauttavan työni rakennetta.

Tutkimuksessani oli paljon pohdiskelevaa mietintää oppilaiden ajatusmallien ja intuition perustalle. Toisten tutkijoiden pohdintaa ei sinällään tule kiistää, vaan pyrkiä katsomaan, mitä niistä mahdollisesti voimme oppia. Toisten tutkijoiden pohdintaa on miltei mahdotonta pitää ei-luotettavana, joten siksi otin ne mukaan tutkimukseni rakenteeseen, kun sen tapauskohtaisesti näin järkeväksi. Luotettavuutta lisää se, että tutkimuksia oltiin tehty asiaatuntivien tutkijoiden toimesta, kuten esimerkiksi David Tallin.

Luotettavuutta olisi voinut lisätä aikaisempien tutkimusten pohjalta lisäksi vielä minun oma tekemäni tutkimuskysely jollekin suomalaiselle luokalle, jos haluaisimme liittää tutkimuksen entistä enemmän ajankohtaisemmaksi ympäristöömme. Näin kuitenkin parhaaksi keskittyä jo olemassa olevien tutkimusten läpikäymiseen, sillä niitä tuntui löytyvän hyvin, ja tiettyyn rajaan tutkimustani tulee rajata, sillä äärettömyyteen liittyviä tutkimuksia voisi tehdä aina vain lisääkin, jolloin saisimme uusia mahdollisia käsityksiä äärettömyydestä irti, koska kyseessä on hyvin abstraktinen käsite, joka voidaan nähdä monesta eri suunnasta.

## 5.4 Jatkotutkimusaiheita

Kansainvälisesti on tutkittu paljon, miten oppilaat käsittävät matemaattisen äärettömyyden. Kuitenkaan Suomessa tällaisia kyselyitä ei ole tietojeni mukaan suoritettu, joten tämän tutkimuksen pohjalta sellainen voisi tuoda uuden näkökulman äärettömyyden ymmärtämiseen. Jatkotutkimuksessa voitaisiin seurata oppilaita yläasteelta aina mahdollisesti lukioon ja yliopistoon katsoen, miten äärettömyyden käsite selventyy ja missä ikävaiheessa muutosta nähtäisiin eniten. Fischebin & co. (1979) olivat selvittäneet, että eri ikäluokkien sisäisissä luokissa äärettömyyden “äärellisyyten” ja “äärettömyyteen” uskovien lukumäärä on tasapuolista. Suomen koululaitoksissa voitaisiin tutkia, miten oppilaat näkevät äärettömyyden ja äärellisyyden käsitteet suhteessa toisiinsa.

Nykyajan kouluopetuksen sähköistymisellä saatetaan saada opetukseen enemmän sisältöä raja-arvojen ja desimaalilukujen käsitteisiin. Tällaiset sähköiset visuaaliset representaatiot voisivat olla eräs tutkimuksen kohde: tulevatko oppilaat itse ymmärtämään äärettömyyden luonnetta erilaisissa matemaattisissa ympäristöissä paremmin uuden teknologian avustuksella?

# 6 Johtopäätökset

Tämän tutkimuksen perusteella voidaan sanoa, että äärettömyys on opiskelijoille ristiriitainen käsite ymmärtää. Oppilaat osaavat paremmin käyttää proseduraalista tietoa kuin konseptuaalista tietoa äärettömyyden kanssa. Äärettömyys saatettiin ymmärtää oikein tietyissä tilanteissa, mutta äärettömyyden näyttäytyessä toisessa esitysmuodossa oppilaat useimmiten ajautuivat omiin sisäisiin ristiriitaisiin ajatteluihin, kun he kokivat äärettömyyden abstraktisesti.

Oikein oppilaat vastasivat äärettömyyden joukkojen $A = \{1, 2, 3, 4,...\}$ ja $B = \{-1, -2, -3, -4,...\}$ alkioiden lukumäärien vertailussa. Tämäntyyppisiin tehtäviin oppilaat pääsivät vastaamaan varmalta intuition pohjalta. Vaikka oppilaat kykenivät vastaamaan oikein, se ei kuitenkaan aina tarkoittanut sitä, että oppilas ymmärtäisi perustellen, miksi kyseiset joukot ovat yhtä suuret. Jos joukon $A$ rinnalle vertailuun tuotiin joukko $C = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2,...\}$, niin joukkojen $A$ ja $C$ vertailussa havaittiin huomattavasti enemmän virhekäsityksiä kuin joukkojen $A$ ja $B$ vertailussa.

Virhekäsityksiin eräänä perusteluna voidaan pitää oppilaiden *johdonmukaisen ajattelun* puutetta. Useimmiten äärettömyys nähdään *yksinkertaisella ajattelulla* eikä siihen kyetä liittämään uusia matematiikan sisältöjä samalla kuitenkin torjuen uudet tiedot oppilaan halutessa välttää oman ajattelunsa ristiriitaa pysyäkseen mukavuusalueellaan abstraktisesti kokemassaan asiassa. Tähän voi vaikuttaa oppilaan kokemukset arkielämässään koulun ulkopuolella, miten hän kokee äärettömyyden käsitteen, esimerkiksi oppilas on tottunut elämässään näkemään vain rajallisia asioita, jolloin hän on muodostanut oman käsityksensä äärellisyydestä. Äärellisyyden käsitettä oppilas saattaa käyttää matematiikassa väärin, jolloin hahmotus äärettömyydestä on ristiriitainen kokemus.

Oppilailla oli konseptuaalista tietoa ymmärtää äärettömyyttä, mutta toisinaan he eivät osanneet soveltaa sitä käytännössä. Joiltain oppilailta puuttui äärettömyyden ymmärtämiseen oleellisesti liittyviä matemaattisia käsitteitä, kuten raja-arvo, desimaalilukujen laajennus sekä Cantorin joukko-opin 1:1 -vastaavuuden hallinta. Oppilas saattoi ymmärtää jonkun äärettömyyteen liittyvän käsitteen ennen toista, mikä aiheutti oppilaalle hämmennystä, kun oppilas koki ymmärtäneensä äärettömyyden jollekin tasolle saakka, mutta ei osannut selittää, mikä aiheutti hänelle kognitiivista ristiriitaa.

# LÄHTEET


Baroody, A. J., Feil, Y., & Johnson, A. R. (2007). An alternative reconceptualization of procedural and conceptual knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38, 115–131.

Byrnes, J. P. & Wasik, B. A. (1991). Role of conceptual knowledge in mathematical procedural learning. *Developmental Psychology*, 27, 777–786.

Canobi, K. H. (2009). Concept-procedure interactions in children's addition and subtraction. *Journal of Experimental Child Psychology*, 102, 131–149.

diSessa, A. A., Gillespie, N. M., & Esterly, J. B. (2004). Coherence versus fragmentation in the development of the concept of force. *Cognitive Science*, 28, 843–900.

Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M., Brown, A. (2005): Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity. *Educational Studies in Mathematics* **58,** 335-359

Edwards, B.S., Ward, M.B. (2004): Surprises from Mathematics Education Research: Student (Mis)use of Mathematical Definitions. Internet-sivulta: *https://web.archive.org/web/20110722153906/http://www.wou.edu/~wardm/FromMonthlyMay2004.pdf*

Fischbein, E., Tirosh, D., Hess, P. (1979): The intuition of infinity. *Educational Studies in Mathematics* **10**, 3-40

Fischbein, E. (2001): Tacit models and infinity. *Educational Studies in Mathematics* **48**, 309-329

Gelman, R. & Williams, E. M. (1998). Enabling constraints for cognitive development and learning: domain specificity and epigenesis. *In D. Kuhn & R. S. Siegler (Eds), Handbook of Child Psychology: Cognition, Perception, and Language* (5th edn, Vol. 2, pp. 575– 630). *New York: John Wiley.*

Goldin Meadow, S., Alibali, M. W., & Church, R. B. (1993). Transitions in concept acquisition: using the hand to read the mind. *Psychological Review*, 100, 279–297.

Haapasalo, L. & Kadijevich, D. (2000). Two types of mathematical knowledge and their relation. *JMD—Journal for Mathematic-Didaktik*, 21, 139–157.

Halford, G. S. (1993). Children's Understanding: The Development of Mental Models. Hillsdale, *NJ: Erlbaum*

Hiebert, J. & Lefevre, P. (1986). Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics: An Introductory Analysis (pp. 1–27). *Hillsdale, NJ: Erlbaum*.

Karmiloff-Smith, A. (1992). Beyond Modularity: A Developmental Perspective on Cognitive Science. *Cambridge, MA: MIT Press.*

Kilpatrick, J., Swafford, J. O., & Findell, B. (2001). Adding it up: Helping Children Learn Mathematics. *Washington, DC: National Academy Press.*

Merriam-Webster's Collegiate Dictionary (2012).

Movshovitz-Hadar, N., Hadass, R. (1990): Preservice education of math teachers using paradoxes. *Educational Studies in Mathematics* **21,** 265-287

Opetushallitus (2019). *Lukion opetussuunnitelman perusteet 2019.*

Rittle-Johnson, B., Siegler, R. S., & Alibali, M. W. (2001). Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: an iterative process. *Journal of Educational Psychology*, 93, 346–362.

Rittle-Johnson, B. & Siegler, R. S. (1998). The relation between conceptual and procedural knowledge in learning mathematics: a review. *In C. Donlan (Ed.), The Development of Mathematical Skills* (pp. 75–110). *London: Psychology Press*

Schechter, E. (2009): Potential versus Completed Infinity:
its history and controversy. Internet-sivulta:
*https://math.vanderbilt.edu/schectex/courses/thereals/potential.html*

Schneider, M. & Stern, E. (2009). The inverse relation of addition and subtraction: a knowledge integration perspective. *Mathematical Thinking and Learning*, 11, 92–101.

Singer, M., Voica, C. (2003): Perception of infinity: does it really help in problem solving? *The Mathematics Education into the 21st Century Project, Proceedings of the International Conference, The Decidable and the Undecidable in Mathematics Education, Brno, Czech Republic, September 2003*

Tall, D. (1976): Conflicts and catastrophes in the learning of mathematics. *Mathematics Institute, University of Warwick.*

Tall, D., Schwarzenberger, R.L.E. (1978): Conflicts in the learning of real numbers and limits. Mathematics Institute, *University of Warwick.*

Tall, D. (1981): Intuitions of infinity. *Mathematics in School,* **10**, 3  30-33

Tirosh, D., Tsamir, P. (1996): The role of representations in student's intuitive thinking about infinity. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, Volume 27*

Tsamir, P. (1999): The transition from the comparison of finite to the comparison of infinite sets: Teaching prospective teacher. *Educational Studies in Mathematics* **38**, 209-234